Übungen zur Theoretischen Physik II: Mechanik

Prof. J. Bosse, FU Berlin

WiSe 2005/06

Blatt 1, Abgabetermin: 24.10.05

Klausurtermin: Fr, 03.02.06, 10:15h - 11:45h

Literatur zu diesem Blatt:
Siegfried Großmann. *Mathematischer Einführungskurs für die Physik.* B. G. Teubner, Stuttgart, 1976. 8. Auflage: ISBN 3-519-23074-7.

1. *Drehungen* (5 P)

   Ein Vektor $\mathbf{a} \mathrel{\hat{=}} (a_1, a_2, a_3)$ gehe bei Drehung um den Winkel ϕ um eine Achse, die durch den Richtungsvektor $\mathbf{n} \mathrel{\hat{=}} (n_1, n_2, n_3)$ mit $|\mathbf{n}|=1$ festgelegt ist, in den Vektor $\mathbf{a}' \mathrel{\hat{=}} (a'_1, a'_2, a'_3)$ über. Die Koordinaten $a'_\alpha := \mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{a}'$ des gedrehten Vektors sind dann gemäß $(\alpha, \beta=1, 2, 3)$

   $$a'_\alpha = D_{\alpha\beta}\, a_\beta \qquad \text{(Summationsabkommen!)} \tag{1}$$

   durch die Matrixelemente $D_{\alpha\beta}=D_{\alpha\beta}(\mathbf{n}, \phi)$ der Drehmatrix $\overset{\leftrightarrow}{D}$ mit den Koordinaten $a_\alpha := \mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{a}$ verknüpft. In Vektornotation schreibt sich der gedrehte Vektor kompakt: $\mathbf{a}'= \overset{\leftrightarrow}{D} \cdot \mathbf{a}$.

   Zeigen Sie, dass für eine Drehung um den Winkel ϕ um die z–Achse ($\mathbf{n} \mathrel{\hat{=}} (0, 0, 1)$)

   $$\overset{\leftrightarrow}{D} \mathrel{\hat{=}} \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

   gilt.

   Hinweis: Skizzieren Sie die Projektionen von $\mathbf{a}$ und $\mathbf{a}'$ auf die (x, y)–Ebene. Nehmen Sie dabei der Einfachheit halber an, dass beide Projektionsvektoren im 1. Quadranten liegen und beachten Sie, dass $a'_1=|\mathbf{a}|\cos(\phi+\psi)$ und $a'_2=|\mathbf{a}|\sin(\phi+\psi)$, wenn ψ den Winkel bezeichnet, den die Projektion von $\mathbf{a}$ mit der x–Achse bildet.

2. *Drehmatrix* 12 P

   Für Drehungen um eine beliebige Achse $\mathbf{n}$ wurde bereits in Theoretische Physik I, Blatt 7

   $$D_{\alpha\beta} = n_\alpha n_\beta + \cos\phi\,(\delta_{\alpha\beta} - n_\alpha n_\beta) - \sin\phi\ \epsilon_{\alpha\beta\gamma} n_\gamma \tag{3}$$

hergeleitet, wobei im letzten Summanden gemäß Summationsabkommen über γ von 1 bis 3 zu summieren ist; $\epsilon_{\alpha\beta\gamma} := (\mathbf{e}_\alpha \times \mathbf{e}_\beta)\cdot\mathbf{e}_\gamma$ beschreibt das LEVI–CIVITA–Symbol.

(a) Überzeugen Sie sich, dass Gl.(3) im Spezialfall $\mathbf{n}{=}\mathbf{e}_3 \mathrel{\widehat{=}} (0,0,1)$ mit Gl.(2) übereinstimmt.

(b) Verifizieren Sie die darstellungsfreie Form von Gl.(3),

$$\overleftrightarrow{D} = \mathbf{nn} + \cos\phi \left[\overleftrightarrow{I} - \mathbf{nn}\right] + \sin\phi\ \overleftrightarrow{J}_{\mathbf{n}}\ , \tag{4}$$

$$= \overleftrightarrow{I} + \phi\ \overleftrightarrow{J}_{\mathbf{n}} + \mathcal{O}(\phi^2) \tag{5}$$

mit der "Erzeugenden einer infinitesimalen Drehung" um $\mathbf{n}$,

$$\overleftrightarrow{J}_{\mathbf{n}} := \sum_{\sigma=1}^{3} (\mathbf{n} \times \mathbf{e}_\sigma)\,\mathbf{e}_\sigma = -\overleftrightarrow{J}_{\mathbf{n}}^{\mathrm{T}}\ , \tag{6}$$

und den Matrixelementen $(\mathbf{nn})_{\alpha\beta} = n_\alpha\, n_\beta$, $\left(\overleftrightarrow{I}\right)_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$ sowie

$$\left(\overleftrightarrow{J}_{\mathbf{n}}\right)_{\alpha\beta} := \mathbf{e}_\alpha \cdot \overleftrightarrow{J}_{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{e}_\beta = (\mathbf{e}_\alpha \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{e}_\beta \tag{7}$$

$$= -\sum_\sigma \epsilon_{\alpha\beta\sigma}\ n_\sigma = -\left(\overleftrightarrow{J}_{\mathbf{n}}\right)_{\beta\alpha}\ . \tag{8}$$

(c) Verifizieren Sie auch noch

$$\overleftrightarrow{J}_{\mathbf{n}} \cdot \overleftrightarrow{D} = \cos\phi\ \overleftrightarrow{J}_{\mathbf{n}} - \sin\phi \left[\overleftrightarrow{I} - \mathbf{nn}\right] \tag{9}$$

für das Matrixprodukt aus Erzeugender und Drehmatrix.
Hinweis: Beachten Sie, dass

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\,\epsilon_{\gamma\alpha'\beta'} = \delta_{\alpha\alpha'}\,\delta_{\beta\beta'} - \delta_{\alpha\beta'}\,\delta_{\beta\alpha'} \quad \text{(Summationsabkommen!)}. \tag{10}$$

3. *Aktive und passive Drehung* (5 P)
Oben wurde die *aktive* Drehung des Vektors $\mathbf{a}$ betrachtet ($\mathbf{a} \to \mathbf{a}'$). Die Zahlen a_1', a_2' und a_3' können aber auch als die Koordinaten des Vektors $\mathbf{a}$ in einem (nun um den Winkel $(-\phi)$ gedrehten) Dreibein von Basisvektoren $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ interpretiert werden (*passive* Drehung).

Zeigen Sie, dass für $\alpha, \beta{=}1, 2, 3$

$$D_{\alpha\beta} = \mathbf{e}'_\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta \,, \qquad \mathbf{e}'_\alpha = \overleftrightarrow{D}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{e}_\alpha \tag{11}$$

gilt, wobei

$$\overleftrightarrow{D}_{\mathbf{n}}^{\mathrm{T}} (\phi) = \overleftrightarrow{D}_{\mathbf{n}} (-\phi) \,. \tag{12}$$

4. *Drehmatrix (Fortsetzung)* (10 P)

   Zeigen Sie, dass die Drehmatrix in Gl.(4) in der kompakten Form

   $$\overleftrightarrow{D}_{\mathbf{n}} (\phi) = \exp\left(\phi \; \overleftrightarrow{J}_{\mathbf{n}}\right) \tag{13}$$

   geschrieben werden kann und dass für die inverse Matrix

   $$\overleftrightarrow{D}_{\mathbf{n}}^{-1} (\phi) = \overleftrightarrow{D}_{\mathbf{n}} (-\phi) = \overleftrightarrow{D}_{\mathbf{n}}^{\mathrm{T}} (\phi) \tag{14}$$

   gilt, die Drehmatrix also eine *orthogonale Transformation* beschreibt.

   Hinweis: Eine Matrix $\overleftrightarrow{X} (t)$ genüge der Differentialgleichung 1. Ordnung,

   $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \overleftrightarrow{X} (t) = \overleftrightarrow{P} \cdot \overleftrightarrow{X} (t) \qquad \text{mit Anfangswert} \qquad \overleftrightarrow{X} (0) = \overleftrightarrow{X}_0 \,, \tag{15}$$

   wobei $\overleftrightarrow{P}$ und $\overleftrightarrow{X}_0$ konstante Matrizen (d.h. unabhängig vom Parameter t). Dann ist —analog zu gewöhnlichen Funktionen—

   $$\overleftrightarrow{X} (t) = \exp(t \; \overleftrightarrow{P}) \cdot \overleftrightarrow{X}_0 \tag{16}$$

   die eindeutige Lösung. Also: Leiten Sie aus Gl.(4) eine Differentialgleichung der Form Gl.(15) nebst Anfangsbedingung her —wobei vom Ergebnis Gl.(9) Gebrauch gemacht werden darf.

5. *Zyklische Vertauschungsrelationen* (6 P)

   Verifizieren Sie für die Erzeugenden infinitesimaler Drehungen um die Koordinatenachsen, $\overleftrightarrow{J}_{\mathbf{e}_\alpha}$ ($\alpha{=}1, 2, 3$), die *zyklischen Vertauschungsrelationen*

   $$\left[\overleftrightarrow{J}_{\mathbf{e}_\alpha}, \overleftrightarrow{J}_{\mathbf{e}_\beta}\right] = \sum_{\gamma=1}^{3} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \; \overleftrightarrow{J}_{\mathbf{e}_\gamma} \,, \tag{17}$$

   wobei $\left[\overleftrightarrow{A}, \overleftrightarrow{B}\right] := \overleftrightarrow{A} \cdot \overleftrightarrow{B} - \overleftrightarrow{B} \cdot \overleftrightarrow{A}$ den *Kommutator* von $\overleftrightarrow{A}$ und $\overleftrightarrow{B}$ bezeichnet.