Übungen zur Theoretischen Physik I: Mechanik

Prof. J. Bosse, FU Berlin

SoSe 2005

Blatt 9, Abgabetermin: 17.06.05

1. *Drehimpuls* (15 P)

   (a) Zeigen Sie, dass der Drehimpuls eines N–Teilchensystems bez. des Ursprungs O durch

   $$\mathbf{L} = M\mathbf{R}_\mathrm{S} \times \dot{\mathbf{R}}_\mathrm{S} + \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i \tag{1}$$

   beschrieben wird, wenn $\mathbf{R}_\mathrm{S}$ den Ortsvektor des Massenschwerpunkts, $M{=}\sum_{i=1}^{N} m_i$ die Gesamtmasse und $\mathbf{r}_i{=}\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_\mathrm{S}$ den Ortsvektor des i–ten Teilchens im Schwerpunktsystem bezeichnen.

   (b) Geben Sie den Drehimpuls einer “Hantel” aus zwei Punktmassen m_1 und m_2 explizit an. Der Teilchenabstand d sei zeitlich konstant, und $\mathbf{n} := (\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1)^0$ bezeichne die Hantel–Richtung.

2. *Drehmoment* (15 P)

   (a) Zeigen Sie, dass Wechselwirkungskräfte zwischen den Teilchen eines N–Teilchensystems nicht zum resultierenden Drehmoment

   $$\mathbf{N} := \sum_{i=1}^{N} \mathbf{R}_i \times \mathbf{K}_i \tag{2}$$

   beitragen. Dabei bezeichnet $\mathbf{R}_i$ den Ort des i–ten Teilchens und $\mathbf{K}_i$ die Kraft auf dasselbe.

   (b) Welches Drehmoment wird in einem homogenen, externen elektrischen Feld $\mathbf{E}^\mathrm{ext}{=}E_0\mathbf{e}_z$ auf zwei geladene Teilchen $(q_1{=}-e,\, q_2{=}+e)$ ausgeübt, die durch Wechselwirkungskräfte im konstanten gegenseitigen Abstand d gehalten werden.

   Hinweis:
   Für die durch ein externes elektrisches Feld $\mathbf{E}^\mathrm{ext}(\mathbf{r})$ auf das Teilchen i ausgeübte Kraft gilt i. Allg. $\mathbf{K}_i^\mathrm{ext}{=}q_i\mathbf{E}^\mathrm{ext}(\mathbf{R}_i)$.

3. *Trägheitstensor* (15 P)

(a) Leiten Sie für einen starren, im Schwerpunkt fixierten Körper aus N Massenpunkten aus Gl.(1) für den Drehimpuls bez. des Schwerpunkts den Ausdruck

$$\overleftarrow{L} = \overleftrightarrow{\Theta} \cdot \overleftarrow{\omega}\ , \qquad \overleftrightarrow{\Theta} := \sum_{i=1}^{N} m_i \left\{ \left(\overrightarrow{r}_i \cdot \overleftarrow{r}_i \right) \overleftrightarrow{I} - \overleftarrow{r}_i \, \overrightarrow{r}_i \right\} \tag{3}$$

ab, wenn

$$\overleftarrow{\omega} = \overleftarrow{n}\ \dot{\phi} \,\widehat{=} \begin{bmatrix} n_1\dot{\phi} \\ n_2\dot{\phi} \\ n_3\dot{\phi} \end{bmatrix} \tag{4}$$

die Winkelgeschwindigkeit bezeichnet, mit der der Körper um eine Achse $\overrightarrow{n}\ \widehat{=}\,(n_1, n_2, n_3)$ (durch den Schwerpunkt) rotiert.

(b) Zeigen Sie, dass der Trägheitstensor $\overleftrightarrow{\Theta}$ bez. eines körperfesten (mitbewegten) Dreibeins $\{\mathbf{e}_1(t), \mathbf{e}_2(t), \mathbf{e}_3(t)\}$ durch die zeitlich konstante, symmetrische Matrix

$$\Theta_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^{N} m_i \begin{pmatrix} y_i^2 + z_i^2 & -x_i y_i & -x_i z_i \\ -x_i y_i & x_i^2 + z_i^2 & -y_i z_i \\ -x_i z_i & -y_i z_i & x_i^2 + y_i^2 \end{pmatrix} \tag{5}$$

dargestellt wird. Geben Sie die Definitionen der Koordinaten x_i, y_i und z_i an.

(c) Schreiben Sie die Matrixelemente $\Theta_{\alpha\beta}$ für die Hantel aus Aufg. 1b explizit an, wenn das Hantel–feste Dreibein mit seinem Ursprung im Schwerpunkt so gewählt wird, dass $\mathbf{e}_3 = (\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1)^0$.