Übungen zur Theoretischen Physik I: Mechanik

Prof. J. Bosse, FU Berlin

SoSe 2005

Blatt 7, Abgabetermin: 03.06.05

1. *Projektor* (10 P)

   (a) Zeigen Sie, dass sich der Vektor $\mathbf{R}_{OM}$, der in Abb.1, S.2 vom Ursprung O nach M zeigt —d.h. die *Projektion* von $\mathbf{r}_P$ in Richtung des Einheitsvektors $\mathbf{n}$— durch Anwendung einer *Projektionsmatrix* $\overleftrightarrow{\mathcal{P}}_{\mathbf{n}}$ auf $\mathbf{r}_P$ ausdrücken lässt,

   $$\mathbf{R}_{OM} = \overleftrightarrow{\mathcal{P}}_{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r}_P \ , \qquad \overleftrightarrow{\mathcal{P}}_{\mathbf{n}} := \mathbf{nn} \ . \tag{1}$$

   Geben Sie das *Matrixelement*

   $$\left(\overleftrightarrow{\mathcal{P}}_{\mathbf{n}}\right)_{\alpha\beta} := \mathbf{e}_\alpha \cdot \overleftrightarrow{\mathcal{P}}_{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{e}_\beta \tag{2}$$

   des "Projektors" $\overleftrightarrow{\mathcal{P}}_{\mathbf{n}}$ in allgemeiner Form für

   i. $\mathbf{n} = \sum_{\alpha=1}^{3} \mathbf{e}_\alpha n_\alpha \widehat{=} (n_1, n_2, n_3)$

   ii. für Projektion auf die z–Achse

   an, und schreiben Sie jeweils auch die 3×3–Matrix explizit an.

   (b) Verifizieren Sie die *Symmetrie*,

   $$\left(\overleftrightarrow{\mathcal{P}}_{\mathbf{n}}\right)_{\alpha\beta} = \left(\overleftrightarrow{\mathcal{P}}_{\mathbf{n}}\right)_{\beta\alpha} \ , \tag{3}$$

   und die *Idempotenz*,

   $$\left(\overleftrightarrow{\mathcal{P}}_{\mathbf{n}}\right)^2 := \overleftrightarrow{\mathcal{P}}_{\mathbf{n}} \cdot \overleftrightarrow{\mathcal{P}}_{\mathbf{n}} = \overleftrightarrow{\mathcal{P}}_{\mathbf{n}} \ . \tag{4}$$

   des Projektors.

   (c) Zeigen Sie, dass sich der Vektor $\mathbf{R}_{MP}$ in Abb.1, S.2 gemäß

   $$\mathbf{R}_{MP} = \overleftrightarrow{\mathcal{P}}_{\mathbf{n}^\perp} \cdot \mathbf{r}_P \tag{5}$$

   aus $\mathbf{r}_P$ durch Anwendung des Projektors $\overleftrightarrow{\mathcal{P}}_{\mathbf{n}^\perp} := \overleftrightarrow{I} - \mathbf{nn}$ ergibt, wobei $\overleftrightarrow{I}$ die Einheitsmatrix bezeichnet.

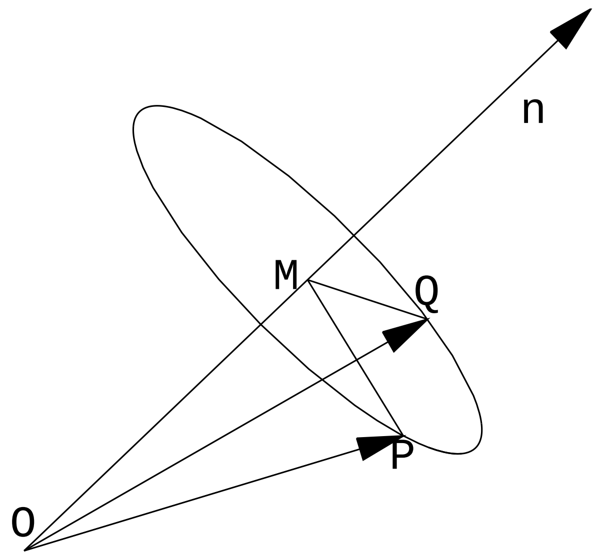

Abbildung 1: Drehung eines Vektors. Der Punkt P wandert bei der Drehung um den Winkel $\phi = \sphericalangle PMQ$ auf einem Kreis um M nach Q; die Drehachse $\mathbf{n}$ ist Normale zur Kreisebene.

2. *Drehung eines Vektors* (20 P)

   Ein Körper werde um eine durch den Einheitsvektor $\mathbf{n}$ definierte, körperfeste Achse gedreht. Der Ortsvektor $\mathbf{r}_P$ eines Punktes P gehe bei Drehung um den Winkel ϕ in den Vektor $\mathbf{r}_Q$ über (siehe Abb.1, S.2). Der gedrehte Vektor $\mathbf{r}_Q$ lässt sich durch Anwendung einer *Drehmatrix* $\overset{\leftrightarrow}{\mathcal{D}}_{\mathbf{n}}(\phi)$ aus dem ursprünglichen Vektor $\mathbf{r}_P$ erzeugen:

   $$\mathbf{r}_Q = \overset{\leftrightarrow}{\mathcal{D}}_{\mathbf{n}}(\phi) \cdot \mathbf{r}_P \ . \tag{6}$$

   Ein expliziter Ausdruck für die Drehmatrix soll im Folgenden hergeleitet werden.

   (a) Sei F der Fußpunkt des Lots von Q auf die Gerade MP. Zeigen Sie, dass

   $$\mathbf{R}_{MF} = \cos\phi \left[\overset{\leftrightarrow}{I} - \mathbf{nn} \right] \cdot \mathbf{r}_P \ . \tag{7}$$

   (b) Zeigen Sie, dass für den Vektor $\mathbf{R}_{FQ}$ vom Fußpunkt F (vergl. Aufg.2a)) nach Q gilt:

   $$\mathbf{R}_{FQ} = \sin\phi \, (\mathbf{n} \times \mathbf{r}_P) \ . \tag{8}$$

(c) Verifizieren Sie die explizite Form

$$\overleftrightarrow{\mathcal{D}}_{\mathbf{n}}(\phi) = \mathbf{nn} + \cos\phi \left[\overleftrightarrow{I} - \mathbf{nn} \right] + \sin\phi \sum_{\sigma=1}^{3} (\mathbf{n} \times \mathbf{e}_\sigma)\, \mathbf{e}_\sigma \qquad (9)$$

unter Verwendung der Ergebnisse aus Gl.(1), Aufg.1 und Gln.(7),(8). Verifizieren Sie auch

$$\left(\overleftrightarrow{\mathcal{D}}_{\mathbf{n}}(\phi) \right)_{\alpha\beta} = n_\alpha n_\beta + \cos\phi \left[\delta_{\alpha\beta} - n_\alpha n_\beta \right] - \sin\phi \sum_{\gamma=1}^{3} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} n_\gamma \qquad (10)$$

für das allgemeine Matrixelement $\left(\overleftrightarrow{\mathcal{D}}_{\mathbf{n}} \right)_{\alpha\beta} := \mathbf{e}_\alpha \cdot \overleftrightarrow{\mathcal{D}}_{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{e}_\beta$.

Hinweis: Verwenden Sie die Zerlegung $\mathbf{r}_P = \sum_{\sigma=1}^{3} \mathbf{e}_\sigma \; \mathbf{e}_\sigma \cdot \mathbf{r}_P$ eines Vektors nach Basisvektoren $\{\mathbf{e}_\sigma | \sigma = 1, 2, 3\}$.

(d) Betrachten Sie in Gl.(10) den Spezialfall $\mathbf{n} = \mathbf{e}_3$, und schreiben Sie die 3×3–Matrix $\overleftrightarrow{\mathcal{D}}_{\mathbf{e}_3}(\phi)$ für Drehungen um die z–Achse explizit an.