Übungen zur Theoretischen Physik I: Mechanik

Prof. J. Bosse, FU Berlin

SoSe 2005

Blatt 6, Abgabetermin: 27.05.05

1. *Periodische Kraft und Resonanzphänomen* (20 P)

   Betrachten Sie die erzwungene Schwingung eines (m, γ, f)–Oszillators unter dem Einfluss einer *periodischen Kraft* harmonischer Zeitabhängigkeit (Frequenz ω),

   $$F(t) = F_0 \cos(\omega t) \ . \tag{1}$$

   (a) Zeigen Sie, dass sich die *eingeschwungene Lösung* $\xi(t)$ für die Auslenkung im Falle der periodischen Kraft auf die Form

   $$\xi(t) = \Re\left\{\tilde{\chi}(\omega)\ F_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\right\} \tag{2}$$

   bringen lässt, wobei abkürzend

   $$\tilde{\chi}(\omega) := \mathrm{i}\int_0^\infty \mathrm{d}t\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}t\omega}\chi(t) \tag{3}$$

   eingeführt wurde, die sog. *dynamische Suszeptibilität* des Oszillators. Dabei bezeichnet $\chi(t)$ die Oszillator–Responsefunktion aus Blatt 5, Aufg. 1.
   Hinweis: $\cos(\omega t)=\Re\left\{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\right\}$ und $\mathrm{i}\chi(t)$ ist reell.

   (b) Offenbar schwingt der Oszillator gemäß Gl.(2) mit der Frequenz ω der anregenden Kraft. Machen Sie das noch deutlicher, indem Sie den Realteil in Gl.(2) explizit ausschreiben und zeigen, dass

   $$\xi(t) = A_\omega \cos(\omega t - \delta_\omega) \tag{4}$$

   mit *Schwingungsamplitude*

   $$A_\omega := |\tilde{\chi}(\omega)| F_0 \tag{5}$$

   und *Phasenverschiebung*

   $$\delta_\omega := \arctan\left(\frac{\Im\{\tilde{\chi}(\omega)\}}{\Re\{\tilde{\chi}(\omega)\}}\right) \ . \tag{6}$$

(c) Verifizieren Sie durch Ausführung der Integration in Gl.(3) die explizite Form der dynamischen Suszeptibilität des Oszillators[1]

$$\tilde{\chi}(\omega) = \frac{-\Omega^2\chi_0}{\omega^2 - \Omega^2 + \mathrm{i}\omega\Gamma} , \quad (7)$$

$$\chi_0 := \tilde{\chi}(\omega{=}0) = \frac{1}{f} . \quad (8)$$

Leiten Sie mit Hilfe von Gl.(7) die expliziten Ausdrücke für Schwingungsamplitude,

$$A_\omega = \frac{F_0\Omega^2\chi_0}{\sqrt{\left(\omega^2 - \Omega^2\right)^2 + \left(\omega\Gamma\right)^2}} , \quad (9)$$

und Phasenverschiebung,

$$\delta_\omega = \arctan\left(\frac{\omega\Gamma}{\Omega^2 - \omega^2}\right) , \quad (10)$$

des Oszillators im eingeschwungenen Zustand her.

(d) Wie ist die Kreisfrequenz ω der anregenden Kraft zu wählen, damit die resultierende Oszillatoramplitude im eingeschwungenen Zustand maximal wird? Warum ermitteln Statiker die Eigenfrequenz(en) eines Gebäudes, wenn eine Maschine darin aufgestellt werden soll?

Fertigen Sie Skizzen der Schwingungsamplitude und der Phasenverschiebung an, die deren Abhängigkeit von der Anregungsfrequenz ω für Fälle unterschiedlicher Dämpfung darstellen. Tragen Sie dazu $\hat{A} := A_\omega/(F_0\chi_0)$ über $\hat{\omega} := \omega/\Omega$ für $\hat{\Gamma} := \Gamma/\Omega{=}0.1,\ 0.75$ und 1.5 auf.

(e) Eine stählerne Brücke biegt sich um 100 mm durch, wenn sie von einer Lokomotive mit einer Masse von 120 t befahren wird. Mit welcher Frequenz (Angabe von $\nu{=}1/T$ in Hz) sollte diese Brücke zur Vermeidung einer Resonanzkatastrophe nicht zu Schwingungen angeregt werden, wenn ihre für die Schwingung effektive Masse 1.19×10^6 kg beträgt?

[1] Der Wert χ_0 von $\tilde{\chi}(\omega)$ bei ω=0 heißt "statische Suszeptibilität". Letztere beschreibt den Response des Systems auf ein *statisches* Feld ($F(t) \to F_0$ für $\omega \to 0$).

2. *Leistungsabsorption* (15 P)

Die auf den Oszillator in Aufg. 1 wirkende periodische Kraft verrichtet eine Arbeit, die dazu benötigt wird, den Oszillator —unter Überwindung der Reibungskraft— in Bewegung zu halten. Dabei ist die aus der Kraftmaschine entnommene, durchschnittliche (d.h. über eine Periode $T{=}2\pi/\omega$ der anregenden Kraft gemittelte) Leistung P gegeben durch:

$$P := \frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{d}t\ \dot{\xi}(t)F(t)\ , \tag{11}$$

wobei $\xi(t)$ die eingeschwungene Lösung Gl.(2) bzw. Gl.(4) bezeichnet.

(a) Begründen Sie den Ausdruck für P.

(b) Führen Sie das Integral in Gl.(11) aus und verifizieren so, dass die aufgenommene Leistung durch den Imaginärteil der dynamischen Suszeptibilität bestimmt wird,

$$P = \frac{1}{2}\,F_0^2\omega\Im\{\tilde{\chi}(\omega)\} = \frac{1}{2}\,F_0^2\frac{\omega^2\Gamma\Omega^2\chi_0}{(\omega^2-\Omega^2)^2+(\omega\Gamma)^2}\ . \tag{12}$$

(c) Zeigen Sie, dass die aufgenommene Leistung maximal wird, wenn die *Resonanzbedingung* $\omega{=}\Omega$ erfüllt ist, die Frequenz der anregenden Kraft also gleich der Eigenfrequenz des Oszillators ist.[2]

(d) Zeigen Sie, dass $P{=}0$ sowohl für einen *ungedämpften* Oszillator als auch im Falle einer *statischen* Kraft.

(e) Skizzieren Sie $\hat{P} := P/(\Omega F_0^2\chi_0)$ als Funktion von $\hat{\omega} := \omega/\Omega$ für $\hat{\Gamma} := \Gamma/\Omega{=}0.1,\ 0.75$ und 1.5.

(f) *Energiedissipation:* Zeigen Sie an Hand der Differentialgleichung der erzwungenen Schwingung (Blatt 5, Aufg. 1), dass die von der periodischen äußeren Kraft $F(t)$ im Mittel geleistete Arbeit *nicht–negativ* ist und vom Oszillator durch Reibung *dissipiert* wird,[3]

$$P := \frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{d}t\ \dot{\xi}(t)F(t) = -\frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{d}t\ \dot{\xi}(t)F_{\text{Reibung}}(t) \geq 0\ , \tag{13}$$

[2] Beachte die unterschiedliche Resonanzbedingung für die Amplitude in Aufg.1d!

[3] Die von der Kraftmaschine geleistete Arbeit wird vom Oszillator *nicht* dauerhaft aufgenommen (absorbiert) sondern *dissipiert*, d.h. in Reibungswärme umgewandelt.

wobei $\xi(t)$ die Auslenkung im eingeschwungenen Zustand bezeichnet.

Hinweis: Beachten Sie, dass hier $\left(\frac{m}{2}\,\dot{\xi}^2 + \frac{f}{2}\,\xi^2\right)$ zwar zeitabhängig ist, aber periodisch mit der Schwingungsdauer T variiert.

3. *Elektrischer Schwingkreis* (10 P)

Ein besonders wichtiges Beispiel für erzwungene Schwingungen bildet der *Schwingkreis* —ein elektrischer Leiterkreis aus den folgenden, hintereinander geschalteten Elementen: eine Spule der Induktivität L, ein Kondensator der Kapazität C und ein Ohmscher Widerstand der Größe R. An den Schwingkreis werde eine Wechselspannung $U(t){=}U_0\cos(\omega t)$ gelegt. Die Summe der Spannungsabfälle im Kreis wird dann zu jedem Zeitpunkt $U(t)$ gerade kompensieren:

$$\begin{aligned} U(t) &= U_0\cos(\omega t) = U_L + U_C + U_R \;, && (14)\\ U_L &= L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}I(t) = L\ddot{Q}(t)\;, && (15)\\ U_C &= \frac{1}{C}\int^t \mathrm{d}t'\; I(t') = \frac{Q(t)}{C}\;, && (16)\\ U_R &= RI(t) = R\dot{Q}(t)\;. && (17)\end{aligned}$$

Die Spannungsbilanz Gl.(14) ergibt demnach für die Ladung $Q(t)$ auf einer Platte des Kondensators die Differentialgleichung:

$$L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{1}{C}Q = U(t)\;, \tag{18}$$

d.h. die Gleichung einer erzwungenen Schwingung.

(a) Geben Sie die Resonanzfrequenz Ω, die Dämpfungskonstante Γ und die statische Suszeptibilität χ_0 des Schwingkreises an.

(b) Zeigen Sie, dass der im Schwingkreis fließende Strom im eingeschwungenen Zustand die Stärke [4]

$$I(t) = \Re\left\{\frac{1}{Z_\omega}\;U_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\omega}\right\} \tag{19}$$

[4] Im Exponenten wurde hier der Elektrotechnik–Konvention entsprechend ein *positives* Vorzeichen mit Hilfe der Beziehung $\Re\{a\}{=}\Re\{a^*\}$ erzeugt!

hat, wobei die komplexe *Impedanz* Z_ω des Schwingkreises

$$Z_\omega := \frac{1}{\mathrm{i}\omega\tilde{\chi}(\omega)^*} = R + \mathrm{i}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \tag{20}$$

eingeführt wurde. Dieses Ergebnis bildet die Grundlage der aus der Elektrotechnik bekannten sog. *Zeigerdiagramme*.[5]

(c) Stellen Sie die Stromstärke in der Form $I(t)=I_\omega \cos(\omega t - \varphi_\omega)$ dar, und geben Sie die Amplitude I_ω und die Phasenverschiebung φ_ω als Funktion der Frequenz ω explizit an.

(d) Diskutieren Sie die aus der Spannungsquelle gezogene Leistung. Wie groß ist ihr maximaler Wert? Was ergibt sich für $C \to \infty$? Welche physikalische Bedeutung hat dieser Grenzfall? Welche Leistung gibt die Spannungsquelle bei Gleichspannung (ω=0) ab?

(e) Zeigen Sie, dass die Ladung $Q(t)$ auf einer Kondensatorplatte nach Abschalten einer *konstanten* Spannung U_0 zur Zeit t=0 die Form

$$Q(t) = \phi(t)\, C U_0\,, \qquad (t \geq 0) \tag{21}$$

annimmt.

Hinweis: Vergl. Blatt 5, Aufg. 2.

[5] Vergl. Ref. [1, Kap.V,45]

Literaturverzeichnis

[1] L. Bergmann and Cl. Schaefer. *Lehrbuch der Experimentalphysik*, volume II (Elektrizitätslehre). Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1961.