Übungen zur Theoretischen Physik I: Mechanik

Prof. J. Bosse, FU Berlin

SoSe 2005

Blatt 5, Abgabetermin: 20.05.05

1. *Erzwungene Schwingung* (15 P)

   Die Auslenkung ξ eines Oszillators (Masse $m>0$, Reibungskonstante $\gamma>0$ und Federkonstante $f>0$), der dem Einfluss einer zeitabhängigen Kraft $F(t)$ ausgesetzt ist, genügt der "Differentialgleichung für erzwungene Schwingungen" (vergl. Vorlesung),

   $$m\ddot{\xi}(t)+\gamma\dot{\xi}(t)+f\xi(t)=F(t)\ , \tag{1}$$

   mit der für die Anfangsbedingungen $\xi_0=\xi_{t_0}(t)\big|_{t=t_0}$ und $v_0=\dot{\xi}_{t_0}(t)\Big|_{t=t_0}$ *eindeutig* bestimmten Lösung ($t\geq t_0$)

   $$\xi_{t_0}(t)=\phi(t-t_0)\,\xi_0+\mathrm{i}\chi(t-t_0)\,mv_0+\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t'\ \mathrm{i}\chi(t-t')\,F(t')\ . \tag{2}$$

   Darin bezeichnen

   $$\phi(t):=\frac{z_1\,\mathrm{e}^{z_2t}-z_2\,\mathrm{e}^{z_1t}}{z_1-z_2} \tag{3}$$

   die (normierte) *Relaxationsfunktion*,

   $$\chi(t):=\frac{\mathrm{e}^{z_1t}-\mathrm{e}^{z_2t}}{\mathrm{i}m(z_1-z_2)} \tag{4}$$

   die *Responsefunktion* und

   $$z_1:=-\Gamma/2+\sqrt{(\Gamma/2)^2-\Omega^2}\ ,\qquad z_2:=-\Gamma/2-\sqrt{(\Gamma/2)^2-\Omega^2} \tag{5}$$

   die beiden Nullstellen des *charakteristischen Polynoms* ($z^2+\Gamma z+\Omega^2$) des Oszillators mit "Dämpfungskonstante" $\Gamma:=\gamma/m$ und "Oszillatorfrequenz" $\Omega:=\sqrt{f/m}$.

   (a) Verifizieren Sie durch Einsetzen in die Differentialgleichung, dass es sich bei der rechten Seite von Gl.(2) tatsächlich um die Lösung von Gl.(1) mit Auslenkung ξ_0 und Geschwindigkeit v_0 zur Anfangszeit t_0 handelt.

(b) Zeigen Sie, dass die Relaxationsfunktion *reell* und die Responsefunktion *rein imaginär* ist:

$$\phi(t)^* = \phi(t) \;, \qquad \chi(t)^* = -\chi(t) \;. \tag{6}$$

(c) Physikalisch lässt sich der Zeitpunkt t_0 in Gl.(2) als *Einschaltzeitpunkt* der Kraft $F(t)$ interpretieren, von dem die Oszillatorauslenkung abhängen wird —zusätzlich zur Abhängigkeit von den Werten ξ_0 und v_0 zum Einschaltzeitpunkt t_0. Allerdings verlieren die "Einschalteffekte" mit der Zeit an Bedeutung, sie "klingen ab". Für Zeiten $t - t_0 \gg \Gamma^{-1}$ ist ihr Einfluss auf die Oszillatoramplitude vernachlässigbar. Warum?

Die Lösung, die sich nach Abklingen der Einschalteffekte einstellt, heißt *eingeschwungene Lösung*. Um den eingeschwungenen Zustand zu beobachten, wartet der Experimentator nach dem Einschalten der Kraft ab (bis $t - t_0 \gg \Gamma^{-1}$), und der Theoretiker betrachtet einfach $\xi(t) := \xi_{t_0}(t)\big|_{t_0=-\infty}$. Zeigen Sie, dass

$$\xi(t) := \int_{-\infty}^{t} \mathrm{d}t' \; \mathrm{i}\chi(t-t')F(t') \;\equiv\; \mathrm{i}\int_{0}^{\infty} \mathrm{d}t' \; \chi(t')F(t-t') \tag{7}$$

die *eingeschwungene Lösung* darstellt. Sie zeichnet sich durch ihre Unabhängigkeit von der speziellen Wahl der Anfangsbedingungen (ξ_0, v_0) aus.

(d) Genügen die Lösungen Gln.(2), (7) dem *Kausalitätsprinzip* ? Begründen Sie Ihre Antwort.

2. *Abschalten einer konstanten Kraft: Relaxation* (20 P)

Betrachten Sie die Oszillatoramplitude aus Gl.(7) nach dem "Abschalten einer konstanten Kraft" zur Zeit t=0, d.h. für $F(t) = F_0\,\Theta(-t)$, wobei $F_0 > 0$ konstant und $\Theta(t)$ die Heavyside–Sprungfunktion.

(a) Zeigen Sie, dass die Auslenkung nach Ausschalten der Kraft F_0 gemäß $(t \geq 0)$

$$\xi(t) = \Phi(t)\, F_0 \tag{8}$$

in die Gleichgewichtslage $\xi(\infty)=0$ relaxiert, wo mit $\Phi(t)$ die sog. Kubo–Relaxationsfunktion des Oszillators eingeführt wurde,

$$\Phi(t) := \mathrm{i}\int_{t}^{\infty} \mathrm{d}t' \; \chi(t') \;. \tag{9}$$

(b) Verifizieren Sie den Anfangswert $\Phi(0)=1/f$ durch

i. Ausführung des Integrals in Gl.(9) unter Verwendung von $\chi(t)$ aus Gl.(4);

ii. die physikalische Überlegung, dass unmittelbar vor Abschalten der konstanten Kraft zur Zeit $t=0$ der Oszillator sich im Kräftegleichgewicht befinden —d.h. die Summe aus Rückstellkraft $-f\xi(0)$ und angelegter Kraft F_0 verschwinden— sollte.

(c) Verifizieren Sie die sog. Kubo–Identität

$$\mathrm{i}\dot{\Phi}(t) \equiv \chi(t) \tag{10}$$

zwischen Responsefunktion und Kubo–Relaxationsfunktion.

(d) Zeigen Sie durch Ausführung des Integrals in Gl.(9),

$$\phi(t) = \frac{\Phi(t)}{\Phi(0)} \;, \tag{11}$$

wobei $\phi(t)$ die *normierte* Relaxationsfunktion aus Gl.(3). Verifizieren Sie, dass sich damit Gl.(8) auch in der Form

$$\xi(t) = \phi(t)\,\xi(0) \tag{12}$$

schreiben lässt, die keinen Hinweis mehr darauf enthält, auf welche Weise die Anfangsauslenkung erzeugt wurde.[1]

(e) Zeigen Sie, dass die normierte Relaxationsfunktion und die Responsefunktion des Oszillators mit der Abkürzung

$$\tilde{\omega} := \sqrt{\Omega^2 - (\Gamma/2)^2} \tag{13}$$

die Gestalt

$$\phi(t) = \exp\left(-\frac{\Gamma}{2}\,t\right)\left[\cos(\tilde{\omega}t) + \frac{\Gamma}{2\tilde{\omega}}\sin(\tilde{\omega}t)\right] \;, \tag{14}$$

$$\chi(t) = \exp\left(-\frac{\Gamma}{2}\,t\right)\frac{\sin(\tilde{\omega}t)}{\mathrm{i}m\tilde{\omega}} \;. \tag{15}$$

annehmen, aus der im “Schwingfall” ($\Gamma/2 < \Omega \iff \tilde{\omega} > 0$) sofort das Verhalten einer gedämpften Schwingung abzulesen ist.

[1] Man beachte, dass Gl.(12) konsistent mit dem Spezialfall $t_0=0$, $v_0=0$ und $F(t) \equiv 0$ von Gl.(2) ist.

(f) Bestimmen Sie $\phi(t)$ aus Gln.(14),(13) für den

i. "aperiodischen Grenzfall" ($\Gamma/2 \to \Omega \iff \tilde{\omega} \to 0$).
Hinweis: $\lim_{x\to 0} \sin(x)/x = 1$.

ii. "überdämpften Fall" ($\Gamma/2 > \Omega \iff \tilde{\omega} = \mathrm{i}|\tilde{\omega}|$).
Hinweis: $\cos(\mathrm{i}x) = \cosh(x)$, $\sin(\mathrm{i}x) = \mathrm{i}\sinh(x)$.

iii. "stark überdämpften Fall" ($\Gamma/2 \gg \Omega$), für den das extrem langsame "DEBYEsche Relaxieren" des Oszillators,

$$\phi(t) \approx \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \ , \tag{16}$$

mit einer —im Vergleich zur natürlichen Oszillator–Zeitskala $\tau_0 := \Omega^{-1}$— *sehr langen* Relaxationszeit

$$\tau := \frac{\Gamma}{\Omega^2} \gg \tau_0 \tag{17}$$

zu verifizieren ist.