Übungen zur Theoretischen Physik I: Mechanik

Prof. J. Bosse, FU Berlin

SoSe 2005

Blatt 4, Abgabetermin: 13.05.05

1. Rakete (12 P)

   Die Beschleunigung einer Rakete setzt sich additiv zusammem aus Schub– und Schwerebeschleunigung:

   $$\ddot{\mathbf{r}} = \dot{m}\mathbf{u}/m + \mathbf{g} \, , \tag{1}$$

   wobei m=$m(t)$ die Masse der Rakete und $\mathbf{u} := \mathbf{v}_A(t) - \dot{\mathbf{r}}(t)$ die Relativgeschwindigkeit der ausgestoßenen Gase (Auswurfgeschwindigkeit $\mathbf{v}_A(t)$) bezeichnen (vergl. Vorlesung).

   (a) Verifizieren Sie für eine "senkrecht fliegende" ($\mathbf{r}(t)$=$z(t)\mathbf{e}_z$) Rakete die Raketengleichung:

   $$\dot{v} = -g + \mu \, u \, , \tag{2}$$

   wobei

   i. v=$\mathbf{e}_z \cdot \dot{\mathbf{r}}(t)$ Geschwindigkeit der Rakete in z–Richtung;
   ii. $g > 0$ Betrag der Schwerebeschleunigung;
   iii. $\mu := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \ln \frac{m_0}{m(t)} > 0$ Auswurfrate, m_0 Startmasse der Rakete;
   iv. $u := |\mathbf{u}| > 0$ Betrag der Relativgeschwindigkeit des Auswurfmaterials.

   (b) Begründen Sie mit Gl.(2) die *Abhebebedingung*:

   > "Die Anfangsschubkraft eines Raketenmotors muss betragsmäßig das Startgewicht der Rakete übertreffen!"

   (c) Häufig sind die Größen μ und u während der ganzen Brenndauer t_B des Raketenmotors in guter Näherung als zeitlich konstant anzusehen, d.h.

   $$\mu \approx \begin{cases} \mu_0 \, , & 0 \le t \le t_B \\ 0 \, , & t > t_B \end{cases} \qquad u \approx \begin{cases} u_0 \, , & 0 \le t \le t_B \\ 0 \, , & t > t_B \end{cases} \tag{3}$$

   Bestimmen Sie unter dieser Voraussetzung

i. $v(t)$, wenn $v(0)$=0.
ii. Geben Sie $m(t)$ explizit an.
iii. Wie groß ist die "Brennschlussgeschwindigkeit"?
iv. Bestimmen Sie den Umkehrzeitpunkt t_U der Rakete.

(d) Wie lautet das 'Weg–Zeit–Gesetz' $s(t)$ für die Rakete?

2. *Synchronsatellit* (8 P)

(a) Wie groß ist der Radius der kreisförmigen Umlaufbahn eines Satelliten zu wählen, wenn dieser antriebslos[1] und geostationär[2] positioniert werden soll?

(b) In einem über den Synchronsatelliten vermittelten Telefongespräch zwischen zwei Teilnehmern A und B auf der Erde kommt die Antwort von B auf die Frage von A bei letzterem mit einer zeitlichen Verzögerung $\tau \geq \tau_{\mathrm{min}}$ an. Geben Sie eine Abschätzung für die untere Grenze τ_{min} an.

3. *Totales Differential* (6 P)

Bestimmen Sie das totale Differential der Funktionen

(a) $f(x,y) := x\ \mathrm{e}^{x^2+y^2}$,

(b) $F(x,y,z) := (x^2 y)/(1+az^2)$, $(a>0)$

4. *Gradient* 10 P

Gegeben sei das Gravitationspotential eines Massenpunktes im Ursprung (Gravitationskonstante G, Masse $M>0$):

$$\phi(x,y,z) = -\frac{GM}{r}\ , \qquad r := \sqrt{x^2+y^2+z^2}\ . \tag{4}$$

(a) Bestimmen Sie die zugehörige Gravitationsfeldstärke

$$\mathbf{g}(x,y,z) := -\vec{\nabla}\phi(x,y,z) \tag{5}$$

durch Bildung des Gradienten.

[1] vergl. hierzu Aufgabe 4c
[2] d. h. stets über demselben Punkt der Erde stehend.

(b) Auf eine Punktmasse m, die sich am Ort $\mathbf{r} \mathrel{\widehat{=}} (x, y, z)$ befinde, wirkt im Gravitationsfeld $\mathbf{g}(x, y, z)$ die Kraft

$$\mathbf{K}(\mathbf{r}) = m\ \mathbf{g}(x, y, z)\ . \tag{6}$$

Überzeugen Sie sich von der Richtigkeit dieser Aussage durch explizites Anschreiben von Betrag und Richtungsvektor der Kraft, $|\mathbf{K}|$ und $\mathbf{K}^0$.

(c) Bestimmen Sie die “Fläche konstanten Gravitationspotentials” (kurz: *Äquipotentialfläche*) zum konstanten Potentialwert $\phi_0 := -GM/a$. Welche Arbeit ist aufzuwenden, um die Masse m auf der Äquipotentialfläche zu verschieben? (vergl. Aufgabe 2a)