Übungen zur Theoretischen Physik I: Mechanik

Prof. J. Bosse, FU Berlin

SoSe 2005

Blatt 10, Abgabetermin: 01.07.05

1. *Mehrdimensionale Integrale* (15 P)

   Berechnen Sie ($\lambda > 0$)

   (a) das Doppel–Integral

   $$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}y \; \mathrm{e}^{-(\lambda x)^2} \; \mathrm{e}^{-(\lambda y)^2} \tag{1}$$

   (b) das Dreifach–Integral

   $$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}y \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}z \; \frac{\mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \; . \tag{2}$$

2. *Trägheitstensor eines Quaders* (15 P)

   (a) Berechnen Sie die Elemente $\Theta_{\alpha\beta}$ (α, β=1, 2, 3) des Trägheitstensors eines homogen mit Masse gefüllten Quaders (Gesamtmasse M) mit Kantenlängen a, b und c bez. eines körperfesten Dreibeins mit Ursprung im Massenschwerpunkt. Die drei Beine seien so gerichtet, dass die Quaderausdehnungen in x–, y– und z–Richtung gerade a, b und c, respektive, betragen.

   (b) Spezialisieren Sie das Ergebnis von Aufg.2a für

      i. einen Würfel der Kantenlänge a

      ii. ein sehr dünnes, rechteckiges Plättchen bzw. Scheibe mit Seitenlängen b, c.

      iii. einen sehr langen Stab mit rechtwinkliger Querschnittsfläche F=bc.

3. *Trägheitsmoment* (15 P)

   Als " Trägheitsmoment um die Rotationsachse $\overleftarrow{n}$ " bezeichnet man den Skalar

   $$\Theta_{\mathbf{n}} := \overrightarrow{n} \cdot \overleftrightarrow{\Theta} \cdot \overleftarrow{n} \; , \tag{3}$$

   wenn $\overleftarrow{\omega} = \dot{\phi} \, \overleftarrow{n}$ die Winkelgeschwindigkeit der Rotation (mit $\overrightarrow{n} \cdot \overleftarrow{n} = 1$) ist.

(a) Verifizieren Sie ($r_\perp^2 := \overrightarrow{r}_\perp \cdot \overleftarrow{r}_\perp$)

$$\Theta_{\mathbf{n}} = \int \mathrm{d}^3 r \; \rho(\mathbf{r}) \, r_\perp^2 \; , \qquad \overleftarrow{r}_\perp := [\overleftrightarrow{I} - \overleftarrow{n}\overrightarrow{n}] \cdot \overleftarrow{r} \tag{4}$$

und damit die Aussage:

"Das Trägheitsmoment eines starren Körpers um eine Rotationsachse ist die Summe seiner —mit dem Quadrat ihres Abstandes von der Drehachse multiplizierten— Massenelemente."

(b) Berechnen Sie das Trägheitsmoment einer homogen mit Masse gefüllten Kugel (Gesamtmasse M) vom Radius a bez. einer Rotationsachse durch ihren Mittelpunkt.

(c) Wie lautet das Trägheitsmoment um die Raumdiagonale des Quaders aus Aufg. 2a? Und wie in den beiden Grenzfällen? Geben Sie das Trägheitsmoment um die Flächendiagonale des Plättchens und um die Längsache des Stabes an.