Heiko Dumlich, Max Hoffmann 4. Juli 2006

9 Aufgaben zur Mathematikvorlesung für Physiker IV

9.1 AWP einer "exakten DGL" und *Picard*-Iteration

Zu lösen ist das AWP:

$$y' = xy + x^3, \qquad y(0) = 0$$

(a)

Wir stellen um:

$$-\left(xy + x^3\right) + y' = 0$$

Somit folgen $g(x, y) = -(xy + x^3)$ und $h(x) = 1$. Wir prüfen, ob die DGL exakt ist mit der Integrabilitätsbedingung $\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial x}$, es folgt:

$$-x \neq 0$$

Die DGL ist also noch nicht exakt. Wir suchen einen integrierenden Faktor:

$$m'(x) = m(x) \frac{-x}{1}$$

Hierfür folgt $m(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}$ als integrierenden Faktor, wir fügen diesen hinzu und erhalten die Gleichung:

$$-\left(xy + x^3\right) e^{-\frac{1}{2}x^2} + e^{-\frac{1}{2}x^2} y' = 0$$

somit folgt $g(x, y) = -(xy + x^3) e^{-\frac{1}{2}x^2}$ und $h(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}$. Wir prüfen wiederum die Integrabilitätsbedingung:

$$-xe^{-\frac{1}{2}x^2} = -xe^{-\frac{1}{2}x^2}$$

sie ist nun also erfüllt, das heisst die DGL ist exakt. Zur Lösung nutzen wir nun den Standartansatz:

$$F(x, y) = \int_{x_0}^{x} g(t, y_0)\, dt + \int_{y_0}^{y} h(x, t)\, dt$$

Somit folgt:

$$F(x, y) = -\int_0^x t^3 e^{-\frac{1}{2}t^2}\, dt + e^{-\frac{1}{2}x^2} \int_0^y dt$$

Wir können den zweiten Term sofort integrieren und beim ersten Term $t^2 = u$ substituieren:

$$F(x,y) = -\int_0^{x^2} \frac{u}{2} e^{-\frac{1}{2}u}\, du + y e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

Nun liefert partielle Integration:

$$F(x,y) = -\left[-\frac{2}{2} u e^{-\frac{1}{2}u}\right]_0^{x^2} - \int_0^{x^2} e^{-\frac{1}{2}u}\, du + y e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

Hieraus folgt:

$$F(x,y) = x^2 e^{-\frac{1}{2}x^2} - \left[-2e^{-\frac{1}{2}u}\right]_0^{x^2} + y e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

Dies liefert nach auflösen:

$$F(x,y) = -2 + \left(y + x^2 + 2\right) e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

Betrachtung von $F(x_0, y_0)$ liefert:

$$F(x_0, y_0) = 2 - 2 = 0$$

Nun setzen wir $F(x,y) = F(x_0, y_0)$ und stellen nach y um und erhalten:

$$y = 2e^{\frac{1}{2}x^2} - x^2 - 2$$

(b)

Für die *Picard*-Iteration gilt allgemein:

$$\varphi_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi_n(t))\, dt$$

Wir wenden die *Picard*-Iteration an, wobei wir als Startpunkt $\varphi_0(x) = 0$ wählen und $f(x,y) = xy + x^3$ ist. Es folgt also:

$$\begin{aligned}
\varphi_0(x) &= 0 \\
\varphi_1(x) &= \int_0^x t^3\, dt = \frac{1}{4}x^4 \\
\varphi_2(x) &= \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{24}x^6 \\
\varphi_3(x) &= \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{24}x^6 + \frac{1}{192}x^8
\end{aligned}$$

Vergleich

Für die e-Funktion erhalten wir die Reihenentwicklung:

$$e^{\frac{1}{2}x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n x^{2n}}{n!} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + \frac{x^6}{48} + \frac{x^8}{384} + \dots$$

Somit folgt für die Lösung aus **(a)**:

$$y = 2 + x^2 + \frac{x^4}{4} + \frac{x^6}{24} + \frac{x^8}{192} + O\left[x^{10}\right] - x^2 - 2$$

Wir können umschreiben zu:

$$y = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{24}x^6 + \frac{1}{192}x^8$$

im Vergleich dazu erhalten wir die Lösung aus **(b)**:

$$\varphi_3(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{24}x^6 + \frac{1}{192}x^8$$

Der Vergleich zeigt also, dass die Lösungswege das gleiche Ergebnis liefern.

9.2 *Picard-Lindelöf* und *Peano*

Wir betrachten die DGL $y'' = 2(y')^3$. Die rechte Seite $f(x, y, y'') = 3y'^3$ sei stetig und beliebig oft stetig nach allen Variablen differenzierbar (daher lokale *Lipschitz*-Bedingung). Also sollten *Picard-Lindelöf* und *Peano* anwendbar sein.

Durch den Punkt $(0, 0)$ gehen mindestens die drei Integralkurven $y_1 = 0$, $y_2 = \sqrt{4 - x} - 2$ und $y_3 = 6 - \sqrt{36 - x}$. Die beiden letzteren lassen sich nicht über den Punkt $(4, -2)$ bzw. $(36, 6)$ hinaus verlängern, brechen also mitten in der Ebene ab (und nicht am Rand).

Zu erklären ist die scheinbare Diskrepanz zur Theorie von Abschnitt 3.4 und 3.5.

Das gestellte Problem ist kein Anfangswertproblem, da zu der DGL 2. Ordnung nur eine Anfangsbedingung gegeben ist. Insofern sind weder *Picard-Lindelöf* noch *Peano* anwendbar. Peano würde auch keinen Widerspruch geben, da er nur mindestens eine beliebig kurze Lösung fordert.

9.3 AWP mit *D'Alembert*scher Reduktion und Variation der Konstanten

Wir betrachten das DGLS:

$$\begin{aligned} y_1' &= \frac{x+1}{x-1}y_1 + y_2 - (x-1)^2 \\ y_2' &= y_1 + y_2 \end{aligned}$$

mit den Anfangswerten:

$$\begin{aligned} y_1(0) &= 1 \\ y_2(0) &= -2 \end{aligned}$$

Wobei uns eine Lösung bekannt ist, diese lautet:

$$\begin{aligned} y_1 &= x-1 \\ y_2 &= -x \end{aligned}$$

Wir nutzen die *D'Alembert*sche Reduktion, somit folgt:

$$\begin{aligned} u_1 &= \alpha(x-1) \\ u_2 &= -\alpha x + w \end{aligned}$$

Wir setzen in unser DGLS ein:

$$\begin{aligned} \alpha'(x-1)+\alpha &= \frac{x+1}{x-1}\alpha(x-1) - \alpha x + w \\ -\alpha' x - \alpha + w' &= \alpha(x-1) - \alpha x + w \end{aligned}$$

Nun können wir umformen:

$$\begin{aligned} \alpha' &= \frac{w}{(x-1)} \\ w' &= w + \alpha' x \end{aligned}$$

Wir können α' einsetzen von der ersten in die zweite Gleichung und erhalten nach umstellen:

$$\frac{w'}{w} = \frac{2x-1}{(x-1)}$$

Nun können wir die Separation der Variablen ausführen:

$$\frac{dw}{w} = \frac{2x-1}{(x-1)}dx$$

Wir integrieren beide Seiten:

$$\ln(w) = 2x + \ln(1-x)$$

Wir wenden die e-Funktion an uns finden:

$$w = (x-1)\, e^{2x}$$

Für w, dies können wir nun in die Gleichung für α' einsetzen und finden:

$$\alpha' = e^{2x}$$

Nun können wir beide Seiten integrieren um α zu erhalten, dies liefert:

$$\alpha = \frac{1}{2} e^{2x}$$

Setzen wir dies in u_1 und u_2 ein, so folgt:

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{2}\,(x-1)\, e^{2x} \\ u_2 &= \frac{1}{2}\,(x-2)\, e^{2x} \end{aligned}$$

Dies ist eine Lösung für das homogene System. Wie man schnell durch eine Probe sieht.

Nun können wir die Variation der Konstanten anwenden um die inhomogene Lösung zu finden, wir definieren unsere Lösung als x_1 und x_2 :

$$\begin{aligned} x_1 &= c y_1 + d u_1 \\ x_2 &= c y_2 + d u_2 \end{aligned}$$

Somit folgt also:

$$\begin{aligned} x_1 &= c\,(x-1) + d\left(\frac{1}{2}\,(x-1)\, e^{2x}\right) \\ x_2 &= c\,(-x) + d\left(\frac{1}{2}\,(x-2)\, e^{2x}\right) \end{aligned}$$

Dies liefert nach Einsetzen in das DGLS:

$$\begin{aligned} c' + \frac{d'}{2} e^{2x} &= -\,(x-1) \\ c'x - \frac{d'}{2}\,(x-2)\, e^{2x} &= 0 \end{aligned}$$

Dies können wir nun lösen und wir erhalten für die Terme der Cramerschen Regel ($Ax = b$, mit x als Variable, in unserem Falle c' und d'):

$$b = \begin{pmatrix} -\,(x-1)^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{vmatrix} (x-1) & \frac{x-1}{2}e^{2x} \\ x & -\frac{x-2}{2}e^{2x} \end{vmatrix} = -(x-1)^2 e^{2x}$$

$$A_{c'} = \begin{vmatrix} -(x-1)^2 & \frac{x-1}{2}e^{2x} \\ 0 & -\frac{x-2}{2}e^{2x} \end{vmatrix} = \frac{(x-1)^2(x-2)}{2}e^{2x}$$

$$A_{d'} = \begin{vmatrix} (x-1) & -(x-1)^2 \\ x & 0 \end{vmatrix} = x(x-1)^2$$

Somit folgt mit $x_i = \frac{\det A_i}{\det A}$ für c' und d' :

$$c' = 1 - \frac{x}{2} \qquad d' = -xe^{-2x}$$

Wir können integrieren um c und d zu erhalten:

$$c = x - \frac{x^2}{4} + A \qquad d = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\right)e^{-2x} + B$$

Somit folgt also die allgemeine Lösung des DGLS, indem wir in x_1 und x_2 einsetzen:

$$\begin{aligned} y_1 &= -\frac{1}{4}x^3 + \frac{9}{4}x^2 + \left(A - \frac{3}{2}\right)x - \left(A + \frac{1}{2}\right) + \frac{(x-1)}{2}Be^{2x} \\ y_2 &= \frac{x^3}{4} - \frac{3}{4}x^2 - \left(\frac{3}{8} + A\right)x - \frac{1}{4} + \left(\frac{x}{2} - 1\right)Be^{2x} \end{aligned}$$

Wir setzen die Randbedingungen ein:

$$\begin{aligned} y_1(0) &= 1 \\ y_2(0) &= -2 \end{aligned}$$

Hieraus folgt:

$$\begin{aligned} y_1 &= -A - \frac{1}{2}B \\ y_2 &= -B \end{aligned}$$

Somit folgt also:

$$A = -2 \qquad B = 2$$

Fuer die Loesung folgt somit:

$$\begin{aligned} y_1 &= -\frac{1}{4}x^3 + \frac{9}{4}x^2 - \frac{7}{2}x + \frac{3}{2} + (x-1)\,e^{2x} \\ y_2 &= \frac{x^3}{4} - \frac{3}{4}x^2 + \frac{13}{8}x - \frac{1}{4} + (x-2)\,e^{2x} \end{aligned}$$