

## 8 Aufgaben zur Mathematikvorlesung für Physiker IV

### 8.1 AWP I

Es gilt  $xy(1+x^2)y' = 1+y^2$  mit  $y(1) = 2$  zu lösen. Das heißt für die allgemeine Lösungsformel:

$$y = \left( y_0 + \int_{x_0}^x dt b(t) e^{-A(x)} \right) e^{A(x)} \text{ mit } A(x) = \int_{x_0}^x dt a(t),$$

dass  $x_0 = 1$  und  $y_0 = 2$ . Zunächst ist der Trick  $2yy' = (y^2)'$  anzuwenden. Das ergibt  $x(1+x^2)(y^2)' = 1+y^2$ . An dieser Stelle bietet es sich an die Substitution  $\tilde{y} = y^2$  anzuwenden, so dass  $x(1+x^2)\tilde{y}' = 1+\tilde{y}$ . Nach Teilen und umstellen erhält man die gewohnte Form:

$$\tilde{y}' = \underbrace{\frac{2}{x+x^3}}_{a(x)} \tilde{y} + \underbrace{\frac{2}{x+x^3}}_{b(x)}.$$

Um  $A(x)$  zu finden empfiehlt sich eine Partialbruchzerlegung mit dem Trick  $t^2 + 1 = (t+i)(t-i)$ :

$$\frac{2}{t(t+i)(t-i)} = 2 \left( \frac{U}{t} + \frac{V}{t+i} + \frac{W}{t-i} \right)$$

... mit dem Nenner auf beiden Seiten multiplizieren ergibt ...

$$2 = U(t+i)(t-i) + Vt(t-i) + Wt(t+i)$$

... nach umstellen ...

$$2 = t^2(U+V+W) + ti(W-V) + U$$

... und aus dem Koeffizientenvergleich folgt  $U = 2$  und  $V = W = -1$ . Und man rechne gleich allgemein weiter

$$\begin{aligned} A(x) &= 2 \int_{x_0}^x dt \frac{1}{t} - \int_{x_0}^x dt \frac{1}{t+i} - \int_{x_0}^x dt \frac{1}{t-i} \\ &= 2 \int_{x_0}^x dt \frac{1}{t} - \left( \int_{x_0}^x dt \frac{1}{t+i} + \int_{x_0}^x dt \frac{1}{t-i} \right) \\ &= 2 [\ln t]_{x_0}^x - [\ln(t+i) + \ln(t-i)]_{x_0}^x \\ &= 2 [\ln t]_{x_0}^x - [\ln(t^2+1)]_{x_0}^x \\ &= 2 \ln \frac{x}{x_0} - \ln \left( \frac{x^2+1}{x_0^2+1} \right) \\ &= \ln \left( \frac{x^2}{x_0^2} \cdot \frac{x_0^2+1}{x^2+1} \right) \end{aligned}$$

Setzt man alles in die Lösungsformel ein, steht dort:

$$\tilde{y} = \left( y_0^2 + \int_1^x dt \frac{2}{t(1+t^2)} e^{-\ln \frac{t^2 x_0^2 + t^2}{t^2 x_0^2 + x_0^2}} \right) e^{\ln \frac{x^2}{x_0^2} \cdot \frac{x_0^2 + 1}{x^2 + 1}}$$

Was sich vereinfacht zu

$$\begin{aligned} \tilde{y} &= \left( y_0^2 + \frac{x_0^2}{x_0^2 + 1} \int_{x_0}^x dt \frac{2}{t^3} \right) \frac{x^2}{x_0^2} \cdot \frac{x_0^2 + 1}{x^2 + 1} \\ &= \left( y_0^2 + \frac{x_0^2}{x_0^2 + 1} \left[ \frac{-1}{t^2} \right]_{x_0}^x \right) \frac{x^2}{x_0^2} \cdot \frac{x_0^2 + 1}{x^2 + 1} \\ &= y_0^2 \frac{x^2}{x_0^2} \cdot \frac{x_0^2 + 1}{x^2 + 1} + \frac{x^2}{x^2 + 1} \left[ \frac{1}{x_0^2} - \frac{1}{x^2} \right] \\ &= \frac{y_0^2 x^2 (x_0^2 + 1) + x^2 - x_0^2}{x_0^2 (x^2 + 1)} \end{aligned}$$

Aus der Resubstitution folgt.  $y = \pm \sqrt{\frac{y_0^2 x^2 (x_0^2 + 1) + x^2 - x_0^2}{x_0^2 (x^2 + 1)}}$ . Setzt man die Randbedingung  $x_0 = 1$  und  $y_0 = 2$  erhält man

$$y = \pm \sqrt{\frac{9x^2 - 1}{1 + x^2}},$$

das bedeutet  $|x| > 1/3$ , damit der Radikant nicht negativ wird. Randbedingungen für eine Lösung auf ganz  $\mathbb{R}$  kann es nicht geben, denn  $x_0$  steht im Nenner, muss also  $x_0 \neq 0$  sein, damit überhaupt eine Lösung existiert. Für jedes betragsmäßig noch so kleine, aber feste  $x_0$ , gibt es ein  $x$ , so dass der Zähler und damit der Radikand negativ wird.

## 8.2 AWP II

Wir betrachten das AWP:

$$y' = -\frac{x}{\sqrt{y} + 1}, \quad y(0) = 0$$

wobei zu zeigen ist, dass dieses keine Lösung besitzt. Es folgt für  $g(y) = \frac{1}{\sqrt{y} + 1}$  und für  $h(x) = x$ , somit also:

$$g(y_0) = \frac{1}{\sqrt{0} + 1} = 1 \neq 0$$

$$h(x_0) = 0$$

Bedingung für die Existenz einer Lösung ist, das (a)  $y_0$  innerer Punkt des Intervalls und (b)  $g(y) = \frac{1}{\sqrt{y} + 1}$  in gesamten Intervall stetig ist. Wenn man das Intervall so wählt, dass  $y_0$  innerer Punkt ist, muss ein bisschen links und rechts von 0 darin liegen. Bei 0 ist  $g$  aber unstetig. Das heißt, wir müssen das Intervall links von 0 abschneiden. Dann ist  $y_0$  aber nicht mehr innerer Punkt.

### 8.3 Kurve im ersten Quadranten mit Randbedingungen mit der Gleichung $y = f(x)$

Wir suchen eine Gleichung  $y = f(x)$  einer im ersten Quadranten verlaufenden Kurve mit den Randbedingungen:

dass sie durch den Punkt  $(24, 3)$ , d.h. also  $x = 24$  mit  $y = 3$ , läuft und die Schnittpunkte jeder Tangenten mit den Koordinatenachsen gleichweit vom Berührungspunkt entfernt sind.

Dies gilt z.B. für die Gleichung:

$$f(x) = \frac{x}{8}$$

Mit  $x = 24$  folgt:

$$f(24) = \frac{24}{8} = 3$$

wie verlangt. Alle Tangenten der Ursprungsgeraden gehen durch den Ursprung. Also ist jeder Berührungspunkt gleich weit vom Schnittpunkt mit den Achsen entfernt, da diese in dem trivialen Fall zusammenfallen.

### 8.4 Exakte DGL

Wir betrachten die DGL:

$$\begin{aligned}\frac{2x}{y^3}dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}dy &= 0 \\ 2xydx + (y^2 - 3x^2)dy &= 0 \\ 2xy + (y^2 - 3x^2)\frac{dy}{dx} &= 0 \\ 2xy + (y^2 - 3x^2)y' &= 0\end{aligned}$$

Somit gilt  $g(x, y) = 2xy$  und  $h(x, y) = y^2 - 3x^2$ , wir benutzen die Integrabilitätsbedingung, die notwendig für die Exaktheit ist und sogar hinreichend für ein einfach zusammenhängendes Gebiet  $G$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial y} &= \frac{\partial h}{\partial x} \\ \Rightarrow 2x &= -6x\end{aligned}$$

Diese Gleichung ist also **nicht** exakt, bzw. wird nur mit  $x = 0$  erfüllt. Wir nutzen einen integrierenden Faktor, wobei:

$$m'(y) = m(y) \frac{\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y}}{g}$$

Es folgt also:

$$m'(y) = -\frac{4}{y}m(y)$$

Hiermit folgt:

$$m(y) = y^{-4}$$

als integrierender Faktor, somit folgt also:

$$2xy^{-3} + y^{-4}(y^2 - 3x^2)y' = 0$$

Dies entspricht der "Ausgangsgleichung", d.h. also, dass es nicht immer sinnvoll ist Faktoren, die man kürzen könnte herauszukürzen, da hierdurch die Exaktheit verloren ginge. Nachdem wir dies eingesehen haben, folgt natürlich auch die Exaktheit der Gleichung, wir nutzen also wieder die Integrabilitätsbedingung, wobei diesmal  $g(x, y) = 2\frac{x}{y^3}$  und  $h(x, y) = \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}$ ,

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial y} &= \frac{\partial h}{\partial x} \\ \Rightarrow -\frac{6x}{y^4} &= -\frac{6x}{y^4}\end{aligned}$$

Diese gilt also, nun versuchen wir  $F$  zu bestimmen mit:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x} &= g, & \frac{\partial F}{\partial y} &= h \\ \frac{\partial F}{\partial x} &= 2\frac{x}{y^3} & \frac{\partial F}{\partial y} &= \frac{1}{y^2} - \frac{3x^2}{y^4}\end{aligned}$$

Für  $F(x, y)$  folgt somit:

$$F(x, y) = \frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} + c$$

Somit folgt mit  $F(x, y) = F(x_0, y_0)$ :

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} + c &= \frac{x_0^2}{y_0^3} - \frac{1}{y_0} + c \\ 0 &= \left(\frac{x_0^2}{y_0^3} - \frac{1}{y_0}\right)y^3 + y^2 - x^2\end{aligned}$$

Es ist die Integralkurve durch den Punkt  $(1, 1)$  zu finden, wir setzen in obige Gleichung  $x_0 = 1$  und  $y_0 = 1$  ein und erhalten:

$$\begin{aligned}y^2 &= x^2 \\y &= \pm x\end{aligned}$$

Ist somit das Ergebnis für die Integralkurve durch den Punkt  $(1, 1)$ , wir setzen dies ein und erhalten:

$$\begin{aligned}2x(\pm x)^{-3} + (\pm x)^{-4} \left( (\pm x)^2 - 3x^2 \right) (\pm 1) &= 0 \\(\pm 2) \cdot x^{-2} - (\pm 2) \cdot x^{-2} &= 0 \\(\pm 2) \cdot x^{-2} &= (\pm 2) \cdot x^{-2}\end{aligned}$$

Die Probe geht auf, somit folgt also  $y = \pm x$  für die Integralkurve dieser DGL durch den Punkt  $(1, 1)$ .