Heiko Dumlich, Max Hoffmann 19. Juni 2006

7 Aufgaben zur Mathematikvorlesung für Physiker IV

7.1 Berechnung von einem Integral mit Residuensatz (Letzte Aufgabe zur Funktionentheorie)

Zu berechnen ist das Integral:

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}dx$$

mit $a > b > 0$. Wir betrachten die Singularitäten bei $x = \pm ia$ und $x = \pm ib$. Wir können also schreiben:

$$f(x) := \frac{\cos x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} = \frac{\cos x}{(x+ia)(x-ia)(x+ib)(x-ib)}$$

Und besitzen somit vier Pole erster Ordnung, aber nur 2 die auf der positiven imaginären Achse liegen in dem Halbkreis, über den integriert wird.

$$\begin{aligned} res\left(\frac{\cos x}{(x-ia)(x+ia)(x+ib)(x-ib)}, ia\right) &= \frac{i\cos ia}{2ab^2-2a^3} = \frac{i\cosh a}{2(a^3-ab^2)} \\ &= \frac{ib\cosh a}{2(a^3b-ab^3)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} res\left(\frac{\cos x}{(x-ia)(x+ia)(x+ib)(x-ib)}, ib\right) &= -\frac{i\cos ib}{2(a^2b-b^3)} \\ &= -\frac{ia\cosh b}{2(a^3b-ab^3)} \end{aligned}$$

Somit ergibt sich mit dem Residuensatz:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\cos x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}dx &= \frac{1}{2}2\pi i\sum_{ia,ib} res(f,s) \\ &= \frac{\pi}{2}\cdot\frac{a\cosh b - b\cosh a}{a^3b-ab^3} \end{aligned}$$

7.2 DGL der Form $F(y,y',y'',y''') = 0$

Wir nehmen an, dass $y = \sin x$ die DGL $F(y,y',y'',y''') = 0$ löse. Wir betrachten folgende Funktionen:

$$\sin 2x \tag{1}$$

$$\sin(x+2) \tag{2}$$

$$2+\sin x \tag{3}$$

$$\cos x \tag{4}$$

und bestimmen, ob diese auch Lösungen sind. Es gilt: $F(\sin x, \cos x, -\sin x, -\cos x) = 0$ Es folgt für

(1) : Es gilt: $F(\sin 2x, 2\cos 2x, -4\sin 2x, -8\cos 2x) = 0$. Diese Funktion ist keine Lösung, da wir die Faktoren in der DGL bei Ableitung erhalten, wodurch diese nicht gelöst wird. Diese können auch nicht durch Wahl eines speziellen x ausgeglichen werden.

(2) : Es gilt: $F(\sin(x+2), \cos(x+2), -\sin(x+2), -\cos(x+2)) = 0$. Diese Funktion ist Lösung der DGL, da wir nur eine Verschiebung des Wertes x um 2 erhalten und sich diese auch bei den Ableitungen nicht weiter auswirkt, da x nicht explizit in der DGL vorkommt. Wir könnten auch, da x frei ist $x = \tilde{x} - 2$ schreiben.

(3) : Es gilt: $F(2+\sin x, \cos x, -\sin x, -\cos x) = 0$. Diese Funktion ist keine Lösung, da die Konstante zwar bei Ableitung wegfällt und somit nicht in den Ableitungen vorkommt, somit jedoch aber auch nicht ausgeglichen werden kann, wodurch dann das Ergebnis nicht 0 sondern -2 liefern würde, da alle anderen Terme identisch sind zu $y = \sin x$.

(4) : Es gilt: $F(\cos x, -\sin x, -\cos x, \sin x) = 0$. Die Funktion ist Lösung, da $(\sin x)' = \cos x$ und x nicht explizit in der DGL vorkommt. sin und cos sind periodische Funktionen, daher liefern sie beide eine Lösung, man kann auch ausnutzen, dass sin und cos nur um $\frac{\pi}{2}$ verschoben sind und somit, da x frei ist diese Verschiebung in $x = \tilde{x} \pm \frac{\pi}{2}$ einfügen.

7.3 AWP

Wir betrachten die DGL:

$$y' = \frac{-2x}{1+x^2}y + \frac{2x^2}{1+x^2}$$

mit der Anfangsbedingung $y(1) = 2$.

Für die Lösung eines AWP gilt allgemein:

$$y = \left(y_0 + \int_{x_0}^{x} b(t)\, e^{-A(t)} dt\right) \cdot e^{A(x)}$$

mit $A(x) = \int_{x_0}^{x} a(t)\, dt$. Wobei in unserem Fall $y_0 = 2$, $x_0 = 1$, $a(t) = \frac{-2t}{1+t^2}$ und $b(t) = \frac{2t^2}{1+t^2}$. Somit folgt:

$$A(x) = -\int_1^x \frac{2t}{1+t^2} dt$$

Hierbei sehen wir, dass der obere Term der Ableitung des unteren Terms entspricht ($\frac{f'(t)}{f(t)} = \ln(f(t))$), somit folgt:

$$A(x) = -\left[\ln\left(1+t^2\right)\right]_1^x = \ln\left(\frac{2}{1+x^2}\right) = \ln(2) - \ln\left(1+x^2\right)$$

$$y = 2 + \int_1^x dt\,\frac{2t^2}{1+t^2}\left(\frac{1+t^2}{2}\right)\cdot\left(\frac{2}{1+x^2}\right)$$

Dies liefert:

$$y = \frac{2}{1+x^2}\left(2 + \left[\frac{1}{3}t^3\right]_1^x\right) = \frac{2}{1+x^2}\left(\frac{6}{3} + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}\right)$$

Somit ist die Lösung:

$$y = \frac{2}{3\left(1+x^2\right)}\left(5+x^3\right)$$

7.4 Beweis

Wir betrachten die Funktion g, die auf dem Intervall I nicht konstant 0 sei. Zu zeigen ist, dass die lineare DGL $y' = h(x)\,y + g(x)$ $(g, h\;stetig\;auf\;I)$ wenigstens eine Lösung besitzt, die im Intervall I das Vorzeichen wechselt.

Hierzu betrachten wir die Lösung des AWP $y(x_0) = 0$ für ein x_0 mit oBdA $g(x_0) > 0$. Es gilt:

$$y = \left(y_0 + \int_{x_0}^x dt\,g(t)\,e^{-H(t)}\right)e^{H(x)}$$

wobei $H(x) = \int_{x_0}^x dt\,h(t)$. Mit den Bedingungen vereinfacht sich dies zu:

$$y = \int_{x_0}^x dt\,g(t)\,e^{-H(t)}$$

$g(x)$ ist stetig, i.e. es existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass $g(x \pm \varepsilon) > 0$. Dann ist

$$y(x+\varepsilon) = e^{H(x)}\int_x^{x+\varepsilon} g(t)\,e^{-H(t)}$$

und vor allem

$$y(x-\varepsilon) = e^{H(x)}\int_x^{x-\varepsilon} g(t)\,e^{-H(t)} = e^{H(x)}\left(-\int_{x-\varepsilon}^x g(t)\,e^{-H(t)}\right)$$

$y(x_0+\varepsilon)$ ist auf jeden Fall positiv, da Integrand und der Faktor $e^{H(x)}$ in jedem Fall positiv sind. $y(x_0-\varepsilon)$ wäre dann aber negativ, weil alle Terme identisch sind, nur wird von rechts nach links integriert. Wäre $g(x_0) < 0$ könnte man genauso argumentieren.