Heiko Dumlich, Max Hoffmann 7. Juni 2006

6 Aufgaben zur Mathematikvorlesung für Physiker IV

6.1 Berechnung von Integralen mit Residuensatz

Wir betrachten das Kurvenintegral:

$$\oint_{|z|=1} \frac{z\,dz}{z^2+2}$$

dieses beschreibt mit $|z| = 1$ den Einheitskreis um den Ursprung. Somit können nur Werte $|z| \leq 1$ angenommen werden. Dies führt jedoch darauf, dass es keine Singularität gibt, daraus folgt das die Funktion $\left(\frac{z}{z^2+2}\right)$ analytisch wird und eine Stammfunktion besitzt, nämlich $\ln z + 2z$, somit also verschwinden muss, es gilt also:

$$\oint_{|z|=1} \frac{z\,dz}{z^2+2} = 0$$

Für das zweite Kurvenintegral gilt:

$$\oint_{|z|=2} \frac{z\,dz}{z^2+2}$$

hierbei gilt $|z| \leq 2$ und wir finden die Singularitäten $s_1 = \sqrt{2}i$ und $s_2 = -\sqrt{2}i$, wir können also unser Kurvenintegral umschreiben zu:

$$\oint_{|z|=2} \frac{z\,dz}{\left(z-\sqrt{2}i\right)\left(z+\sqrt{2}i\right)}$$

Für den Residuensatz gilt:

$$\oint_{\gamma} f(z)\;dz = 2\pi i \sum_{s\in S} res\,(f;s)\cdot n\,(s;\gamma)$$

da wir uns innerhalb eines Kreises befinden, gilt $n = 1$ und somit:

$$\oint_{\gamma} f(z)\;dz = 2\pi i \sum_{s\in S} res\,(f;s)$$

Für unsere Funktion folgt somit:

$$\oint_{|z|=2} \frac{z\,dz}{\left(z-\sqrt{2}i\right)\left(z+\sqrt{2}i\right)} = 2\pi i \left(res\left(f;\sqrt{2}i\right) + res\left(f;-\sqrt{2}i\right)\right)$$

Wir können nun die Residuen berechnen:

$$res\left(f;\sqrt{2}i\right)=\frac{z}{\left(z+\sqrt{2}i\right)}|_{z=\sqrt{2}i}=\frac{\sqrt{2}i}{\sqrt{2}i+\sqrt{2}i}=\frac{1}{2}$$

$$res\left(f;-\sqrt{2}i\right)=\frac{z}{\left(z-\sqrt{2}i\right)}|_{z=-\sqrt{2}i}=\frac{-\sqrt{2}i}{-\sqrt{2}i-\sqrt{2}i}=\frac{1}{2}$$

Somit folgt also, wenn wir die Ergebnisse einsetzen:

$$\oint_{|z|=2}\frac{z\,dz}{z^2+2}=2\pi i$$

6.2 Anwendung des Residuensatzes

Wir betrachten eine Funktion f, die in einer offenen Menge analytisch sei, welche das reele Intervall $[a,b]$ enthalte und auf diesem nur reele Werte annehme. γ sei eine einfach geschlossene Kurve, die dieses Intervall einmal im positiven Sinne umkreist $n\left(f;s\right)=1$. Zu zeigen ist, dass es ein $c\in]a,b[$ derart gibt, dass:

$$\oint_\gamma\frac{f\left(z\right)}{\left(z-a\right)\left(z-b\right)}\,dz=\oint_\gamma\frac{f\left(z\right)}{\left(z-c\right)^2}\,dz$$

Wir berechnen zuerst die beiden Seiten mit dem Residuensatz, somit folgt:

$$\oint_\gamma\frac{f\left(z\right)}{\left(z-a\right)\left(z-b\right)}\,dz=\frac{f\left(a\right)-f\left(b\right)}{a-b}$$

und

$$\oint_\gamma\frac{f\left(z\right)}{\left(z-c\right)^2}\,dz=f'\left(c\right)$$

somit haben wir die Bedinungen:

$$\frac{f\left(a\right)-f\left(b\right)}{a-b}=f'\left(c\right)$$

wobei $c\in]a,b[$. Dies ist gerade der Mittelwertsatz der Differentialrechnung der die Aussage trifft, dass ein $c\in]a,b[$ existiert. Da dieser gilt, ist auch das zu zeigende gezeigt.