Heiko Dumlich, Max Hoffmann 29. Mai 2006

5 Aufgaben zur Mathematikvorlesung für Physiker IV

5.1 Identitätssatz, Analytische Fortsetzung

Z.Z. Es gibt keine ganze Fuktion f mit $f\left(\frac{1}{2n}\right)=\frac{1}{n}$ und $f\left(\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{n^2}$ für alle $n\in\mathbb{N}\backslash\{0\}$

Angenommen es gäbe eine solche Funktion f, dann könnte man die beiden daran gestellten Bedingung als Teilfolgen auffassen:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{2n}\right) &= g(x)=\frac{1}{n} \\ f\left(\frac{1}{2n+1}\right) &= u(x)=\frac{1}{n^2} \end{aligned}$$

u und g wären nur dann Teilfolgen der selben Funktion, wenn sie sich analytisch so fortsetzen ließen, dass $u=g$ gilt. Laut Identitätsatz müsste dann gelten:

$$\{z\in\mathbb{C}:g(z)=u(z)\}$$

hat einen Häufungspunkt in $\mathbb{C}$.

Es gilt $g=u\Leftrightarrow g,u=\frac{1}{4\alpha^2}$ mit $\alpha\in\mathbb{N}\backslash\{0\}$. Die jeweiligen z_α lauten dann aber

$$z_{\alpha g}=\frac{1}{8\alpha^2};\ z_{\alpha u}=\frac{1}{4\alpha+1}$$

wobei aber $z_{\alpha g}\overset{!}{=}z_{\alpha u}$ um den Identitätssatz zu erfüllen.

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \frac{1}{4\alpha+1} &\overset{!}{=} \frac{1}{8\alpha^2} \\ \Leftrightarrow 4\alpha+1 &\overset{!}{=} 8\alpha^2 \\ \Leftrightarrow 4+\frac{1}{\alpha} &\overset{!}{=} 8\alpha \end{aligned}$$

Es gibt offensichtlich kein α, dass diese Beziehung erfüllt. Das heißt:

$$\{z\in\mathbb{C}:g(z)=u(z)\}=\{\}$$

und hat demnach keinen Häufungspunkt in $\mathbb{C}$.

5.2 Maximumsprinzip

$$h(z)=z^2+z-1$$

Gesucht: Betragsmaximum von h im Einheitskreis $\bar{K}(0,1)$.
h ist analytisch daher ist das Maximumsprinzip anwendbar. Das Betragsmaximum kann nur auf dem Rand liegen. Definiere: $z^0 = e^{i\varphi}$.

$$\begin{aligned}
h\left(z^0\right) &= \left(e^{i\varphi}\right)^2 + e^{i\varphi} - 1 = e^{i2\varphi} + e^{i\varphi} - 1 \\
\Rightarrow \left|h\left(z^0\right)\right| &= \left|e^{i\varphi} + e^{i2\varphi} - 1\right| \\
&= \left|\cos\varphi + \cos 2\varphi - 1 + i\left(\sin\varphi + \sin 2\varphi\right)\right| \\
&= \sqrt{\left(\cos\varphi + \cos 2\varphi - 1\right)^2 + \left(\sin\varphi + \sin 2\varphi\right)^2} \\
&= \left(3 - 2\cos\varphi - 2\left(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\right) + 2\cos\varphi\left(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\right) + 4\sin^2\cos\varphi\right)^{1/2} \\
&= \left(3 - 2\cos^2\varphi + 2\sin^2\varphi + 2\sin^2\varphi\cos\varphi - 2\sin^2\varphi\cos\varphi\right)^{1/2} \\
&= \sqrt{5 - 4\cos^2\varphi} \\
&= \sqrt{3 - 2\cos 2\varphi}
\end{aligned}$$

Das Betragsmaximum lautet dann also $\sqrt{5}$ für alle $\varphi = \frac{\pi}{2} + m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$. Somit folgt für $z = i, -i$.

5.3 Alternativer Satz von Liouville

(a)

Wir berechnen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $z_1 \neq z_2$ und $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$:

$$\oint_{|z|=R} \frac{f(z)}{(z - z_1)(z - z_2)} dz$$

mit $R > |z_1|, |z_2|$. Wir nutzen den Ansatz:

$$f(z) = (z - z_2)\, h(z) + (z - z_1)\, g(z)$$

Somit folgt:

$$\oint_{|z|=R} \frac{f(z)}{(z - z_1)(z - z_2)} dz = \oint \frac{h(z)}{(z - z_1)} dz + \oint \frac{g(z)}{(z - z_2)} dz$$

Für die zwei Teilintegrale folgt mit Cauchyschen Integralsatz:

$$\oint \frac{h(z)}{(z - z_1)} dz = 2\pi i\, h(z_1)$$

bzw.

$$\oint \frac{g(z)}{(z - z_2)} dz = 2\pi i\, g(z_2)$$

Somit folgt also:

$$\oint_{|z|=R} \frac{f(z)}{(z-z_1)(z-z_2)} dz = 2\pi i \; (h(z_1) + g(z_2))$$

Wir können die Hilfsfunktionen durch Umstellen mit der Funktion f ersetzen:

$$\frac{f(z)}{(z-z_2)} - \frac{(z-z_1)}{(z-z_2)} g(z) = h(z)$$

somit folgt mit z_1 :

$$h(z_1) = \frac{f(z_1)}{(z_1 - z_2)}$$

Für die Hilfsfunktion $g(z_2)$ folgt:

$$g(z_2) = -\frac{f(z_2)}{(z_1 - z_2)}$$

Wir ersetzen und erhalten:

$$\oint_{|z|=R} \frac{f(z)}{(z-z_1)(z-z_2)} dz = 2\pi i \, \frac{f(z_1) - f(z_2)}{(z_1 - z_2)}$$

als Lösung für das Integral.

(b)

Für dieses Integral muss 0 folgen, da wir den Rand im Unendlichen besitzen und die Funktion beschränkt ist.