Übungsbogen

Heiko Dumlich und Max Hoffmann

17. Mai 2006

4 Aufgaben zur Mathematikvorlesung für Physiker IV

4.1

Wir betrachten den Kreis mit Mittelpunkt 0 und Radius a, sowie die Ellipse mit den Halbachsen a und b. Es gilt $a > b$, wobei $a, b \in \mathbb{R}^+$. Für die Kurven gilt $\kappa(t) = ae^{it}$ und $\gamma(t) = a\cos t + ib\sin t$, mit $t \in [0, 2\pi]$.

z.z.

$$\oint_\kappa \frac{dz}{z} = \oint_\gamma \frac{dz}{z}$$

Wir betrachten unsere Skizze. Somit können wir auch einen zweiten Kreis in die Skizze hinzufügen mit dem Radius b. Für dessen Kurve gilt somit $\eta(t) = be^{it}$. Durchlaufen wir nun geschickt unsere Ellipse mit dem inneren Kreis, so folgt:

$$\oint_\gamma \frac{dz}{z} = \oint_{rechterTeil} \frac{dz}{z} + \oint_\eta \frac{dz}{z} + \oint_{linkerTeil} \frac{dz}{z}$$

Wir wissen, da κ und η Kurven für Kreise beschreiben (nach 3.4.1):

$$\oint_\kappa \frac{dz}{z} = \oint_\eta \frac{dz}{z}$$

Da jedoch auch:

$$\oint_\gamma \frac{dz}{z} = \oint_\eta \frac{dz}{z}$$

gilt, da die geschlossenen Integrale über den rechten Teil der Ellipse ohne den Kreis und den linken Teil der Ellipse ohne den Kreis gleich 0 sind (wir durchlaufen sie in jeweils der entgegengesetzten Richtung, wie in 3.4.1), folgt somit auch:

$$\oint_\kappa \frac{dz}{z} = \oint_\gamma \frac{dz}{z}$$

was zu zeigen war. Nun können wir noch die Integrale betrachten, wobei für das Kreisintegral folgt:

$$\oint_{\kappa} \frac{dz}{z} = 2\pi i$$

und für das Integral um die Ellipse mit $\oint_{\gamma} f(z)\,dz = \int f(\gamma(t))\,\dot{\gamma}(t)\,dt$ folgt:

$$\oint_{\gamma} \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{a\sin t + ib\cos t} \cdot (-a\cos t + ib\sin t)$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{2\pi} \frac{\left(b^2 - a^2\right)\sin t\cos t}{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\,dt + iab\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}$$

Das erste Integral liefert 0 somit folgt also:

$$\oint_{\gamma} \frac{dz}{z} = iab\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}$$

und wenn wir in unserer oben bewiesene Beziehung einsetzen folgt:

$$2\pi i = iab\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}$$

Also nach kürzen durch iab:

$$\frac{2\pi}{ab} = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}$$

was zu zeigen war.

4.2

Es gilt die Vorschrift $F(z) = \oint \frac{\Re(w)}{w-z}\,dw$, die im Innern des Einheitskreises ($|w| < 1$) eine Funktion definiert. Auf dem Einheitskreis ($|w| = 1$) gilt $\bar{w} = \frac{1}{w}$, daraus folgt $\Re(w) = \frac{1}{2}\left(w + \frac{1}{w}\right)$. Somit folgt also:

$$\frac{\Re(w)}{w-z} = \frac{1}{2}\left(\frac{w}{w-z} + \frac{1}{w(w-z)}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{w}{w-z} + \frac{1}{z(w-z)} - \frac{1}{zw}\right)$$

Wir setzen unseren Term für $\frac{\Re(w)}{w-z}$ in die Funktion $F(z)$ ein und erhalten:

$$F(z) = \oint_{|w|=1} \frac{1}{2}\left(\frac{w}{w-z} + \frac{1}{z(w-z)} - \frac{1}{zw}\right)dw$$

Wir teilen das Integrals in drei Integrale auf:

$$F(z) = \frac{1}{2}\left(\oint \frac{w}{w-z}\,dw + \oint \frac{dw}{z(w-z)} - \oint \frac{dw}{zw}\right)$$

Wir verwenden für die Lösung der drei Integrale die Cauchysche Integralformel $f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|w-z_0|=R} \frac{f(w)}{w-z}\, dw$.

Für die Berechnung des ersten Integrals wählen wir $f(w) = z$ und $z = z$. Somit folgt:

$$\oint \frac{w}{w-z}\, dw = 2\pi i z$$

Für das mittlere Integral wählen wir $f(z) = \frac{1}{z}$ und $z = z$, somit folgt:

$$\oint \frac{dw}{z(w-z)} = \frac{2\pi i}{z}$$

Für das dritte Integral benutzen wir $\oint_\gamma f(z)\, dz = \int f(\gamma(t))\,\dot\gamma(t)\, dt$ mit der Kurve für den Kreis von $\gamma = e^{it}$:

$$\oint \frac{dw}{zw} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{ze^{it}} ie^{it}\, dt = \frac{i}{z}\int_0^{2\pi} dt = \frac{2\pi i}{z}$$

Wir fügen die einzelnen Integrationen wieder zum Gesamtintegral zusammen und erhalten:

$$F(z) = \pi i z + \frac{\pi i}{z} - \frac{\pi i}{z} = \pi i z$$

Wir erhalten nicht das für die Integration über den Kreis erwartete Ergebnis von $2\pi i \Re(z)$. Dies liegt darin begründet, dass die Funktion nicht analytisch ist, somit also auch nicht die Cauchysche Integralformel angewandt werden darf, welche Analytizität vorraussetzt. Dies folgt, weil wir die Definition $\bar w = \frac{1}{w}$ benutzen, welche auf dem Rand des Einheitskreises gilt. Jedoch verlangt die Analytizität eine offene Menge, da jedoch Randpunkte in unsere Menge auf diese Weise betrachtet werden, ist die Menge nicht mehr offen und somit auch nicht mehr analytisch. Zudem gilt die Vorschrift für das Innere des Einheitskreises, somit ist fraglich, inwieweit der Hinweis überhaupt verwendet werden darf, wenn er nur "auf" dem Einheitskreis gilt, da die Vorschrift somit auf den Rand ausgeweitet werden können müsste.

4.3

Wir betrachten das Umlaufintegral:

$$\oint_{|z|=1} \frac{\cos^2(tz)}{z^3}\, dz$$

wobei $t > 0$ gelten soll und wir über den Einheitskreis ($|z| = 1$) integrieren. Wir nutzen die verallgemeinerte Cauchysche Integralformel:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\oint \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}\, dw$$

Hierzu wählen wir die Funktion $f(z) = \cos^2(tz)$ und den Punkt $z = 0$, somit folgt:

$$f^{(2)}(0) = \frac{2!}{2\pi i} \oint \frac{1}{w^3} \cdot \cos^2(tw)\ dw$$

Für unsere Funktion folgt jedoch nun $f(0) = \cos^2(0) = 1$ und somit für die 2. Ableitung $f''(0) = 0$. Setzen wir dies nun in unsere Gleichung ein, folgt:

$$0 = \frac{1}{\pi i} \oint \frac{\cos^2(tz)}{z^3} dz$$

somit folgt also für das Umlaufintegral:

$$\oint_{|z|=1} \frac{\cos^2(tz)}{z^3}\, dz = 0$$

Das Integral ist also 0, d.h. es besitzt eine Stammfunktion.