Übungsbogen

Heiko Dumlich und Max Hoffmann

10. Mai 2006

3 Aufgaben zur Mathematikvorlesung für Physiker IV[1]

3.1

Wir suchen die Bedingungen an die reellen Zahlen a, b, c, mit denen $ax^2 + 2bxy + cy^2$ der Realteil eines komplexen Polynoms wird. Zudem bestimmen wir dieses Polynom. Es ist sofort abzulesen, dass das ursprüngliche Polynom höchstens von 2. Ordnung ist :

$$f(z) = w_\alpha z^2 + w_\beta z + w_\gamma$$

wobei $z = x + iy$ und $w_j = u_j + iv_j$. Wir schreiben also $f(z)$ ausführlich :

$$f(z) = (u_\alpha + iv_\alpha)(x + iy)^2 + (u_\beta + iv_\beta)(x + iy) + u_\gamma + iv_\gamma$$

$$= (u_\alpha + iv_\alpha)\left(x^2 + 2xyi - y^2\right) + (u_\beta + iv_\beta)(x + iy) + u_\gamma + iv_\gamma$$

$$= \left(u_\alpha x^2 + u_\alpha 2xyi - u_\alpha y^2\right) + \left(iv_\alpha x^2 - v_\alpha 2xy - iv_\alpha y^2\right) + (u_\beta x + u_\beta iy) + (iv_\beta x - v_\beta y) + u_\gamma + iv_\gamma$$

Wir formen um und erhalten :

$$= u_\alpha\left(x^2 - y^2\right) - v_\alpha 2xy + u_\beta x - v_\beta y + u_\gamma + i\left(v_\alpha\left(x^2 - y^2\right) + u_\alpha 2xy + u_\beta y + v_\beta x + v_\gamma\right)$$

Somit folgt für den Realteil :

$$\Re\left(f(z)\right) = u_\alpha\left(x^2 - y^2\right) - v_\alpha 2xy + u_\beta x - v_\beta y + u_\gamma$$

Hieraus erkennen wir im Vergleich mit unserem gegebenen Term, dass die Terme $u_\beta x$, $v_\beta y$, u_γ nicht mit unserem gegebenem Polynom erzeugbar sind. Dies heißt aber zugleich, dass u_β, v_β und u_γ Null sein müssen. Also bleibt für $f(z)$ nur die Möglichkeit $f(z) = w_\alpha z^2 + iv_\gamma$ übrig. Somit folgt

[1] Freitag

$$\Re\left(w_\alpha\right) = u_\alpha = a$$

$$c = -a$$

$$\Im\left(w_\alpha\right) = v_\alpha = -b$$

Somit folgt also für die reellen Zahlen $a = -c$ und $b = 0$. Somit folgt für den Realteil des Polynoms :

$$\Re\left(f(x,y)\right) = a\left(x^2 - y^2\right) = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

Und für das komplexe Polynom insgesamt :

$$f(x,y) == u_\alpha\left(x^2 - y^2\right) - v_\alpha 2xy + i\left(v_\alpha\left(x^2 - y^2\right) + u_\alpha 2xy\right) + iv_\gamma$$

$$f(z) = w_\alpha z^2 + iv_\gamma$$

3.2

Wir betrachten die Funktion $f(z) = ie^z$, wir zerlegen die Funktion in Real- und Imaginärteil und Rekonstruieren danach $f(z)$ aus dem Imaginärteil v.

$$ie^z = ie^{(x+iy)} = ie^x \cdot e^{iy} = ie^x\left(\cos y + i\sin y\right) = -\sin y + i\left(\cos y \cdot e^x\right)$$

Somit folgt für den Real- und Imaginärteil :

$$\Re\left(f\left(z\right)\right) = u(x,y) = -\sin y$$

$$\Im\left(f\left(z\right)\right) = v(x,y) = \cos y \cdot e^x$$

Wir wenden zur Rekonstruktion aus dem Imaginärteil das folgende Rezept an :

$$f\left(z\right) = 2iv\left(\frac{z}{2}, -i\frac{z}{2}\right) + const.$$

Somit folgt :

$$f\left(z\right) = 2i\left(\cos\left(-i\frac{z}{2}\right) \cdot e^{\frac{z}{2}}\right) + const.$$

Nun folgt mit $\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$ und da der Kosinus eine gerade Funktion ist $\cos\left(-z\right) = \cos z$:

$$f\left(z\right) = 2i\left(\frac{e^{-\frac{z}{2}} + e^{\frac{z}{2}}}{2}\right) \cdot e^{\frac{z}{2}} + const. = i \cdot e^z + i \cdot e^0 + const.$$

Also folgt mit der Rekonstruktion :

$$f(z) = i \cdot e^z + i + const.$$

Mit der Konstante $const. = -i$ wird die Rekonstruktion komplett und wir erhalten die ursprüngliche Funktion :

$$f(z) = i \cdot e^z$$

3.3

Wir betrachten das geschlossene Integral $\oint_\gamma \bar{z}\, dz$, wobei γ ein Kreis vom Radius r sei. Wir wählen also als Kure $\gamma = r \cdot e^{it}$, mit $t \in [0,\, 2\pi]$. Für die Ableitung von γ gilt $\dot{\gamma} = ir \cdot e^{it}$. Somit folgt also :

$$\oint_\gamma \bar{z}\, dz = \int_0^{2\pi} dt\ (\bar{\gamma}(t))\ \dot{\gamma}(t) = \int_0^{2\pi} dt\, re^{-it} \cdot ire^{it} = ir^2 \int_0^{2\pi} dt = 2\pi r^2 i$$

$$\Rightarrow \oint_\gamma \bar{z}\, dz = 2\pi r^2 i$$

Unter Verwendung des Hauptsatzes der Integralrechnung gilt :

$$\oint_\gamma f(z)\, dz = F(b) - F(a) = 0$$

für Funktionen, die eine Stammfunktion besitzen. In unserem Fall erhalten wir jedoch $\oint_\gamma \bar{z}\, dz \neq 0$. Es muss jetzt noch gezeigt werden, dass unsere Funktion $\bar{z}$ stetig ist.

Beweis: $x \longmapsto x$ ist stetig. Stetigkeit überträgt sich auf Summen und Produkte stetiger Funktionen .

Es gilt also $\oint_\gamma \bar{z}\, dz \neq 0$ und $\bar{z}$ ist stetig. Somit folgt, dass $\bar{z}$ keine Stammfunktion besitzt.