Übungsbogen

Heiko Dumlich und Max Hoffmann

3. Mai 2006

2 Aufgaben zur Mathematikvorlesung für Physiker IV

2.1

(a)

Wir bestimmen den Konvergenzradius der Potenzreihe $\Sigma_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^2}$. Es gilt für den Konvergenzradius $R = \frac{1}{limsup\sqrt[n]{|a_n|}}$. Somit folgt für unsere Potenzreihe :

$$R = \frac{1}{limsup\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}}} = \frac{1}{limsup\frac{1}{\sqrt[n]{n^2}}} = \frac{1}{limsup\frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2}}$$

Wir wissen, dass $\sqrt[n]{n} \longrightarrow 1$ für $n \longrightarrow \infty$. Somit folgt also für den Konvergenzradius :

$$R = \frac{1}{\frac{1}{1^2}} = 1$$

Somit beträgt der Konvergenzradius $R = 1$.

(b)

Wir betrachten die Randpunkte des Konvergenzkreises. Für $z = 1$ folgt demnach :

$$\Sigma_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^2} \longrightarrow \Sigma_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \longrightarrow \frac{\pi^2}{6}$$

Diese Reihe ist bekannt und konvergiert.
Für den Fall, dass $z = -1$ ist, erhalten wir :

$$\Sigma_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^2} \longrightarrow \Sigma_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} \longrightarrow -\frac{\pi^2}{12}$$

Diese Reihe konvergiert auch, da sie aus einer Leibnizreihe und eine konvergenten Reihe besteht. Sie konvergiert sogar "schneller" als für den Fall $z = 1$. Die Reihen konvergieren beide, jedoch besitzen sie verschiedene Grenzwerte !

(c)

Wir erhalten für die gliedweise abgeleitete Reihe aus $f(z) = \Sigma_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^2}$ folgt $f'(z) = \Sigma_{n=2}^{\infty} n\frac{z^{n-1}}{n^2} = \Sigma_{n=2}^{\infty}\frac{z^{n-1}}{n}$, somit folgt für den Konvergenzradius :

$$R_{f'} = \frac{1}{limsup\sqrt[n]{\frac{1}{n}}} = 1$$

Da wir wie schon in (a) $\sqrt[n]{n} \longrightarrow 1$ mit $n \longrightarrow \infty$ wissen.

Wir betrachten das Konvergenzverhalten in den Randpunkten des Konvergenzkreises, wobei für $z = 1$ folgt :

$$\Sigma_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n} \longrightarrow \infty$$

Diese Reihe ist bekannt und divergiert.

Für den Fall, dass $z = -1$ ist, erhalten wir :

$$\Sigma_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n} \longrightarrow ln(2) - 1 \approx -0.307$$

Somit konvergiert in diesem Fall nur einer der Randpunkte ($z = -1$), während der andere divergiert. Der Grenzwert ist jedoch auch verschieden von den Grenzwerten der Stammreihe.

2.2

Wir betrachten : $|e^{iz}|$ mit $z = 6e^{\frac{\pi i}{3}}$

Wir können somit z auch als :

$$z = 6(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}) = 6(\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}\sqrt{3}) = 3 + \sqrt{27}i$$

schreiben. Damit folgt für $|e^{iz}|$:

$$|e^{iz}| = |e^{-\sqrt{27}+3i}| = |e^{-\sqrt{27}}| \cdot |e^{3i}| = |e^{-\sqrt{27}}| \cdot 1 \approx 5.54 \cdot 10^{-3}$$

2.3

Wir bestimmen die komplexen Nullstellen von e^z:

$$e^z = 0 + 0i$$

$$e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$$

$$\Rightarrow 0 = e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$$

$$\Leftrightarrow 0 = \cos y + i \sin y$$

Hieran erkenne wir sofort, dass keine Lösung zu finden ist, da es keinen Wert $y \in \mathbb{R}$ gibt, für den cos und sin 0 werden können !