Heiko Dumlich, Max Hoffmann 10. Juli 2006

10 Aufgaben zur Mathematikvorlesung für Physiker IV

10.1 Zweite Lösung zu gegebener Lösung einer homogenen linearen DGL

Wir betrachten die DGL

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{1}{4x^2}\right) y = 0,$$

wobei $u(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ eine Lösung sei, es ist eine zweite linear unabhängige Lösung für $x > 0$ zu bestimmen.

Wir nutzen den Ansatz von *4.7.2*, es folgt:

$$z(x) = \int \frac{e^{\ln x^{-1}}}{\frac{\sin^2 x}{x}}\, dx = \int \frac{1}{\sin^2 x}\, dx$$

Hierfür kennen wir jedoch die Stammfunktion, aus $\frac{d}{dx}\left(-\frac{\cos x}{\sin x}\right) = \frac{1}{\sin^2 x}$ folgt, wie man leicht mit der Quotientenregel nachprüfen kann:

$$z(x) = -\frac{\cos x}{\sin x}$$

Nun können wir noch u und z zu der neuen linear unabhängigen Lösung zusammenfügen, es folgt:

$$y(x) = -\frac{\cos x}{\sqrt{x}}$$

10.2 Allgemeine Lösung einer linearen DGL

Wir betrachten die DGL

$$y'' + 2y' + y = 6e^{-x},$$

wobei wir das charakteristische Polynom der homogenen DGL mit:

$$z^2 + 2z + 1 = 0,$$

bestimmen können. Hieraus ergibt sich die doppelte Nullstelle -1 somit folgt also die Lösung:

$$\varphi(x) = (A + Bx)\, e^{-x}$$

Nun können wir die Randbedingungen, dass $\varphi(0) = 0$ und $\varphi'(0) = 1$ ergeben muss nutzen, um die Koeffizienten A bzw. B zu bestimmen, für diese folgt somit:

$$A = 0 \qquad B = 1$$

Dies liefert dann mit 4.3.7:

$$f(x) = \int_0^x 6(x-t)\, e^{t-x} e^{-t} dt = 6e^{-x} \left(x^2 - \int_0^x dt\, t \right) = 6e^{-x} \left(x^2 - \frac{1}{2} x^2 \right)$$

Somit ist die allgemeine Lösung für dieses AWP:

$$y = 3x^2 e^{-x}$$

Nun führt die Summe der Lösung der homogenen DGL und die partikuläre Lösung durch das AWP auf die allgemeine Lösung für die inhomogene DGL:

$$y = e^{-x} \left(A + Bx + 3x^2 \right)$$

10.3 Allgemeine Lösung eines Systems

Wir betrachten das System:

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 - y_3, \\ y_2' &= y_3 - y_2, \\ y_3' &= y_1 - y_2, \end{aligned}$$

Wir können dies in ein System aus Matrizen umschreiben:

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Wir nutzen den Ansatz $\vec{y} = e^{\lambda x} \vec{v}$ somit folgt $\lambda \vec{v} = A\vec{v}$. Es muss für die Eigenwerte gelten:

$$\underbrace{(A - \lambda E)}_{\det = 0} \vec{v} = 0$$

Somit folgt also:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & -1 \\ 0 & -1-\lambda & 1 \\ 1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)(-1-\lambda)(-\lambda) + 1 - 1 - \lambda - \lambda = -\lambda^3 - \lambda^2 - 2\lambda = -\lambda \left(\lambda^2 + \lambda + 2 \right)$$

Für die Nullstellen folgt somit $\lambda_1 = 0$. Und mit $\lambda^2 + \lambda + 2$ und der *pq-Formel* folgen zusätzlich $\lambda_2 = \frac{1}{2} \left(-1 + \sqrt{7} i \right)$ und $\lambda_3 = -\frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{7} i \right)$. Somit können wir die Eigenwerte einsetzen und finden:

$\lambda_1 = 0:$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dies führt auf:

$$\begin{aligned} v_1 &= v_2 = v_3 \\ v_2 &= v_1 = v_3 \\ v_3 &= v_1 = v_2 \end{aligned}$$

Hieraus folgt mit $v_2 = 1:$

$$Eig\,(A;0) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \alpha, \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

$\lambda_2 = \frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{7}i\right):$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{7}i\right) & 1 & -1 \\ 0 & -1-\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{7}i\right) & 1 \\ 1 & -1 & -\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{7}i\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Führt auf:

$$\begin{aligned} v_1 &= -v_2 \\ v_2 &= -v_1 = \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{7}i\right) v_3 \\ v_3 &= \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{7}i\right) v_2 \end{aligned}$$

Mit $v_2 = 1$ folgt also:

$$Eig\left(A; \frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{7}i\right)\right) = \left\{ \begin{pmatrix} -\sqrt{7}i \\ 1 \\ \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{7}i\right) \end{pmatrix} \beta, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

$\lambda_3 = -\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{7}i\right):$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{7}i\right) & 1 & -1 \\ 0 & -1+\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{7}i\right) & 1 \\ 1 & -1 & \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{7}i\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wir erhalten:

$$
\begin{aligned}
v_1 &= -v_2 \\
v_2 &= -v_1 = \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{7}i\right)v_3 \\
v_3 &= \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{7}i\right)v_2
\end{aligned}
$$

Wir wählen wieder $v_2 = 1$ und erhalten:

$$
Eig\left(A; -\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{7}i\right)\right) = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{7}i\right) \end{pmatrix} \gamma, \gamma \in \mathbb{R} \right\}
$$

Für $\vec{y}' = A\vec{y}$ folgt somit mit unserem Ansatz $\vec{y} = e^{\lambda x}\vec{v}$:

$$
\vec{y}_A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{y}_B = e^{\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{7}i\right)x} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{7}i\right) \end{pmatrix}, \quad \vec{y}_C = e^{-\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{7}i\right)x} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{7}i\right) \end{pmatrix}
$$

Wir betrachten um die reellen Lösungen zu erhalten die Real- und Imaginärteile:

$$
\vec{y}_A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{y}_B = e^{-\frac{1}{2}x} \begin{pmatrix} -\cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right) \\ \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right) \\ \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right) - \sqrt{7}\sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right)\right] \end{pmatrix}, \quad \vec{y}_C = e^{-\frac{1}{2}x} \begin{pmatrix} -\sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right) \\ \sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right) \\ \frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right) + \sqrt{7}\cos\left(\ldots\right.\right. \end{pmatrix}
$$

10.4 Homogene lineare DGL zweiter Ordnung

Wir betrachten die homogene lineare DGL zweiter Ordnung

$$
p(x)\,y'' + q(x)\,y' + r(x)\,y = 0, \tag{1}
$$

welche *exakt* heisst, wenn sie in der Form $(a(x)\,y' + b(x)\,y)' = 0$ geschrieben werden kann. Für diese lassen sich alle Lösungen aus DGLen erster Ordnung $ay' + by = C$ mit Konstanten C bestimmen.

(a)

Es ist zu zeigen, dass (1) genau dann *exakt* ist, wenn $p'' - q' + r = 0$.

Wir wissen, dass die DGL exakt heisst, wenn sie in der Form $(a(x)\,y' + b(x)\,y)' = 0$ geschrieben werden kann, wir können die Ableitung ausführen und erhalten:

$$
\begin{aligned}
\left(a(x)\,y' + b(x)\,y\right)' &= a(x)\,y'' + a'(x)\,y' + b(x)\,y' + b'(x)\,y \\
&= a(x)\,y'' + \left(a'(x) + b(x)\right)y' + b'(x)\,y
\end{aligned}
$$

Dies können wir nun mit (1) idenzifizieren, somit folgt für die Koeffizienten:

$$p = a, \quad q = a' + b, \quad r = b'.$$

Setzen wir dieses nun in das zu Zeigende ein, so folgt:

$$\underbrace{a'' - a''}_{=0} \underbrace{-b' + b}_{=0} = 0,$$

was zu zeigen war.

(b)

Wir suchen einen integrierenden Faktor, der eine nicht-exakte DGL in eine exakte DGL überführt, wobei hierfür die oben angegebenen Bedingungen gelten sollen.

Es folgt also durch Multiplikation eines integrierenden Faktors M :

$$Mp\,(x)\,y'' + Mq\,(x)\,y' + Mr\,(x)\,y = 0,$$

wobei hierdurch dann die "Exaktheitsbedingung":

$$p'' - q' + r = 0$$

erfüllt werden soll. Der Vergleich der Koeffizienten, wie bei Teil **(a)** liefert:

$$p = \frac{a}{M}, \quad q = \tfrac{a'+b}{M}, \quad r = \frac{b'}{M}.$$

Nun können wir diese in die Exaktheitsbedingung einsetzen:

$$\frac{a''}{M} - \frac{aM'}{M} - \frac{a'M'}{M^2} - \frac{aM''}{M^2} + \frac{2aM'^2}{M^4} - \frac{a''}{M} - \frac{b'}{M} + \frac{a'M'}{M^2} + \frac{bM'}{M^2} + \frac{b'}{M} = 0$$

Wir können umformen und erhalten:

$$\begin{aligned} -\frac{aM'}{M} - \frac{aM''}{M^2} + \frac{2aM'^2}{M^4} + \frac{bM'}{M^2} &= 0 \\ \frac{1}{M^2}\left(bM' - aMM' + \frac{2aM'^2}{M^2} - aM''\right) &= 0 \end{aligned}$$

Ja, was macht man jetzt, irgendwie sieht das sehr komisch aus... habe gerade keine Idee, sry

...

(c)

Wir prüfen zuerst die Exkaktheit der DGL, für die wir ein Fundamentalsystem finden sollen:

$$x^2y'' + 3xy' + y = 0$$

Somit folgt:

$$p = x^2, \quad q = 3x, \quad r = 1.$$

Mit der Exaktheitsbedingung also:

$$2 - 3 + 1 = 0,$$

diese ist also erfüllt und somit die DGL exakt.

Nun versuchen wir ein Fundamentalsystem zu finden. Hierzu können wir die Exaktheit ausnutzen, es gilt:

$$p = a, \quad q = a' + b, \quad r = b'.$$

Somit also:

$$a = x^2, a' = 2x \qquad b = x, b' = 1$$

Wir können dies einsetzen:

$$x^2y' + xy = C$$

Wir können nun eine Lösung für die homogene Gleichung bestimmen:

$$x^2y' + xy = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$$

Integration liefert:

$$y = \frac{1}{x}$$

Wir kriegen die zweite Lösung mit der Randbedingung $y(0) = 0$ aus der inhomogenen Gleichung, dies liefert mit der Standardformel:

$$y = \frac{\ln x}{x}$$

Somit folgt für das Fundamentalsystem:

$$y = \frac{1}{x}(A + b \ln x)$$