1 Aufgaben zur Mathematikvorlesung für Physiker IV

Zur Abgabe am 27. April vor der Vorlesung

Aufgabe 1.1 Rechnen Sie nach, daß die Kehrwertabbildung $w = \frac{1}{z}$ die Kreisscheiben

$$K(0,1), \quad K(-\tfrac{i}{2}, \tfrac{1}{2}) \quad \text{und} \quad K(2,1) \qquad \text{in die Mengen}$$

$$\{w : |w| > 1\}, \qquad \{w : Im(w) > 1\} \text{ (Halbebene)} \quad \text{und} \quad K(\tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3}) \text{ (Kreisscheibe)}$$

überführt.

Aufgabe 1.2 Bestimmen Sie alle dritten Wurzeln aus i (jeweils durch Angabe von Real- und Imaginärteil).

Aufgabe 1.3 Angenommen die drei komplexen Zahlenz_1, z_2, z_2 sind paarweise verschieden und die ihnen entsprechenden Punkte der Gaussschen Zahlenebene liegen auf einer Geraden. Beweisen Sie, daß

$$z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_3 + z_3\bar{z}_1$$

reell ist. Wie wichtig ist die vorausgesetzte Verschiedenheit? Gilt auch die Umkehrung?
Hinweis: Schreiben Sie z_3 als reelle Linearkombination von $z : 1$ und z_2.

Für das Tutorium

Aufgabe 1.4 Was ist hier faul?

$$-1 = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{(-1) \cdot (-1)} = \sqrt{1} = 1$$

Aufgabe 1.5 Schraffieren Sie (5 Skizzen) jeweils die Mengen der Zahlenebene, die durch die Bedingungen

$$(a) \quad 1 < |z + i| \leq 2 \qquad (b) \quad Re(z^2) > 1 \qquad (c) \quad |z + 3i| > 4$$

$$(d) \quad |z + 2 - 3i| + |z - 2 + 3i| < 10 \quad \text{und} \quad (e) \quad |2 + iz| < |z|$$

definiert werden.

Aufgabe 1.6 Angenommen die den komplexen Zahlen z_1, z_2, z_3 entsprechenden Punkte bilden ein (im positiven Sinn numeriertes) gleichseitiges Dreieck. Beweisen Sie

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1.$$

Hinweis: Machen Sie ein Bild! Bestimmen Sie dann (geometrisch!) $\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}$. Was passiert bei zyklischer Vertauschung?

Aufgabe 1.7 Wohin werden die beiden offenen Halbebenen

$$\{z \in \mathbb{C} : Im(z) + Re(z) > 0\} \qquad \text{bzw.} \qquad \{z \in \mathbb{C} : Im(z) + Re(z) > 1\}$$

von der Abbildung $w = \frac{1}{z}$ überführt.
Hinweis: Schreiben sie für das erste Bild $z = re^{i\varphi}$ mit $-\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{3}{4}\pi$ und für das zweite $z = x + iy$ mit $x + y > 1$. Die Rechnung wird abgekürzt wenn man $w = u + iv$ setzt und $\frac{1}{x^2+y^2} = u^2 + v^2$ beachtet.

Aufgabe 1.8 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ sei eine monoton fallende Nullfolge positiver reeller Zahlen. Zeigen Sie, daß $\sum_{n=0}^{\infty} a_n i^n$ konvergiert.

Wer noch das bloße Rechnen mit komplexen Zahlen üben möchte,

kann sich selbst Aufgaben stellen oder die folgenden bearbeiten:

Aufgabe 1.9 Berechnen Sie $\frac{2+3i}{1-i}$. Leiten Sie eine Formel her, mit der man die beiden Quadratwurzeln aus $a + bi$ berechnet. Bestimmen Sie mit ihrer Hilfe die beiden Wurzeln aus dem Quotienten.

Aufgabe 1.10 Berechnen Sie
(a) $(7 + 3i) \cdot (2 - i)$, (b) $(1 + i) \cdot (-2 + i) \cdot (-1 + i)$ (c) $\frac{1+i}{i}$ (d) $\frac{1}{1-i}$ (e) $\frac{2+i}{2-i}$.

Aufgabe 1.11 Skizzieren Sie in der Gaussschen Zahlenebene, die Menge aller z so daß

(a) $|z + 2| \leq |z - 1|$. Vielleicht überlegen Sie vorher, welche reellen Zahlen die Ungleichung erfüllen.

(b) $Re(z^2) = 0$, (c) $Im(z^2) = 0$ (d) $|z - i| = 3$

Nicht rechnen, geometrisch veranschaulichen!

Aufgabe 1.12 (a) Stellen Sie $\sqrt{3} + i$ in trigonometrischer Form dar und berechnen Sie dann $(\sqrt{3} + i)^5$.

(b) Berechnen Sie $(1 + i)^{2n}$.

(c) Berechnen Sie $\cos\frac{2\pi}{3}$ und $\sin\frac{2\pi}{3}$ mit der Formel von Moivre.

Aufgabe 1.13 Berechnen Sie die absoluten Beträge von $\frac{3\cdot(2+i)\cdot(3+2i)}{4+7i)\cdot(1-2i)}$ und $2 - i + \frac{3-4i}{2+i}$

Aufgabe 1.14 Berechnen Sie die Quadratwurzeln aus $8 + 6i$.

Aufgabe 1.15 Lösen Sie die quadratischen Gleichungen
(a) $z^2 - 4z + 8 = 0$ und (b) $z^2 + (2 + 2i)z + 5i = 0$
Wieso gilt die p-q-Formel auch bei komplexen Koeffizienten?

Die Aufgaben und einige weitere Angaben zur Vorlesung auch auf

http://page.mi.fu-berlin.de/~heindorf/mfp.html

2 Aufgaben zur Mathematikvorlesung für Physiker IV

Zur Abgabe am 4. Mai vor der Vorlesung

Aufgabe 2.1 (a) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$.

(b) Was passiert in den Randpunkten des Konvergenzkreises?

(c) Vergleichen Sie dieses Verhalten mit dem der gliedweise abgeleiteten Reihe (fast dieselbe wie in 1.5.4).

Aufgabe 2.2 Berechnen Sie $\left|e^{iz}\right|$ für $z = 6e^{\pi i/3}$.

Aufgabe 2.3 Bestimmen Sie sämtliche komplexe Nullstellen von e^z und $\sin z$. Benutzen Sie $\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$.

Aufgabe 2.4 Rechnen Sie nach, daß die durch $f(x + iy) = x^3y^2 + ix^2y^3$ definierte Funktion $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ genau auf den Achsenpunkten komplex differenzierbar ist.

Für das Tutorium

Aufgabe 2.5 Bestimmen Sie die Konvergenzradien von

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2} z^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2n+1} z^{2n+1}$$

Erinnern Sie sich dazu an den Grenzwert von $\sqrt[n]{n}$.

Aufgabe 2.6 Für welche komplexen z ist $e^{2\pi iz} = 1$?

Aufgabe 2.7 Untersuchen Sie ob die Funktion $z \mapsto \bar{z} + 1/\bar{z}$ im Punkt $z = 1$ differenzierbar ist und bestimmen Sie gegebenenfalls die Ableitung.
Hinweis: Man könnte mit (CR) arbeiten. In diesem Fall ist aber die Betrachtung des Differenzenquotienten günstiger.

Aufgabe 2.8 Untersuchen Sie die Abbildung $w = \sin z$. Stellen Sie speziell fest, in welchen Teil der w-Ebene das Rechteck

$$-\frac{\pi}{2} \leq Re(z) \leq \frac{\pi}{2} \qquad 0 \leq Im(z) \leq b$$

der z-Ebene überführt wird.
Bestimmen Sie dazu das Bild der vier Randstrecken. Das Bild des Rechtecks ist die davon begrenzte Figur. Die im Skript enthaltenen Tatsachen über die komplexe Sinusfunktion dürfen benutzt werden; dann geht es etwas schneller.

Aufgabe 2.9 Wenn a positiv reell ist und $z \in \mathbb{C}$ beliebig, so gilt welche der folgenden Aussagen?

$|a^z| = a^{|z|}$ $\qquad |a^z| = a^{Re(z)}$ $\qquad |a^z| = a^{|Re(z)|}$ $\qquad |a^z| = a^{Im(z)}$ $\qquad |a^z| = a^{|Im(z)|}$ $\qquad |a^z| = \left|a^{\bar{z}}\right|$

3 Aufgaben zur Mathematikvorlesung für Physiker IV

Zur Abgabe am 11. Mai vor der Vorlesung

Aufgabe 3.1 Unter welchen Bedingungen an die reellen Zahlen a, b, c ist $ax^2 + 2bxy + cy^2$ der Realteil eines (welchen) komplexen Polynoms?

Aufgabe 3.2 Zerlegen Sie die Funktion ie^z in Real- und Imaginärteil und überprüfen sie die Gültigkeit des Rezeptes $f(z) = 2iv(\frac{z}{2}, -i\frac{z}{2}) + const.$ zur Rekonstruktion von f aus v.

Aufgabe 3.3 Berechnen Sie $\displaystyle\oint_\gamma \bar{z}\, dz$, wobei γ irgend ein Kreis vom Radius r sein soll. Schließen Sie daraus, daß $z \mapsto \bar{z}$ in keiner offenen Teilmenge von $\mathbb{C}$ eine Stammfunktion hat.

Für das Tutorium

Aufgabe 3.4 Finden Sie eine analytische Funktion, deren Realteil

$$(a) \quad x^2 - y^2 \qquad\qquad (b) \quad x^3 - y^3$$

ist oder begründen Sie, daß es keine derartige Funktion gibt.

Aufgabe 3.5 Betrachtet wird das Polynom $f(z) = z^3 + iz$.
Finden Sie $u(x, y)$ und $v(x, y)$, so daß $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$. Benutzen Sie die Methoden aus 2.3.9 um f aus u und v bzw. (bis auf eine Konstante) aus u zu rekonstruieren.

Aufgabe 3.6 Die holomorphe Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ habe konstanten Betrag: $|f(z)| = r$. Zeigen Sie, daß f selbst konstant ist.
Anleitung: Differenzieren Sie $u^2 + v^2 = R^2$ nach x und y. Benutzen Sie (CR) und interpretieren Sie die beiden Gleichungen als homogenes LGS in den Unbestimmten u, v.

Aufgabe 3.7 Berechnen Sie $\oint_\gamma \bar{z}\, dz$ wobei γ der positiv durchlaufene Einheitskreis ist.

Aufgabe 3.8 Ist f eine Funktion, so soll $\bar{f}$ die (punktweise) konjugierte Funktion bezeichnen. Ist speziell γ eine Kurve, so ist $\bar{\gamma}$ das Spiegelbild an der reellen Achse. Welche der folgenden Formeln trifft für alle stetigen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ zu?

$$(a) \quad \int_\gamma \bar{f}(z)\, dz = \overline{\int_\gamma f(z)\, dz} \qquad (b) \quad \int_{\bar{\gamma}} \bar{f}(z)\, dz = \overline{\int_\gamma f(z)\, dz} \qquad (c) \quad \int_{\bar{\gamma}} f(z)\, dz = \overline{\int_\gamma f(z)\, dz}$$

Aufgabe 3.9 (Zum Nachdenken für Liebhaber) Die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sei durch

$$f(z) = \begin{cases} \exp(-1/z^4), & z \neq 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

definiert. Dann ist f in allen Punkten $\neq 0$ differenzierbar (nach Kettenregel), erfüllt also dort die CAUCHY-RIEMANNschen Differentialgleichungen. Rechnen Sie nach, daß

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(ih) - f(0)}{ih} = 0.$$

Folgern Sie, daß (CR) auch für $z = 0$ (und damit überall) gilt. Stellen Sie fest, daß

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{f(he^{i\frac{\pi}{4}}) - f(0)}{he^{i\frac{\pi}{4}}}$$

nicht existiert. Daher ist f im Nullpunkt nicht differenzierbar.
Warum widerlegt das Beispiel nicht Aussage 2.3.2?

4 Aufgaben zur Mathematikvorlesung für Physiker IV

Zur Abgabe am 18. Mai vor der Vorlesung

Aufgabe 4.1 $a > b$ seien positiv reell. Wir betrachten den Kreis mit Mittelpunkt 0 und Radius a, sowie die Ellipse mit den Halbachsen a und b (Skizze!). Ihre Parametrisierungen werden gegeben durch $\kappa(t) = ae^{it}$ und $\gamma(t) = a\cos t + ib\sin t$ wobei $t \in [0, 2\pi]$.
Begründen Sie $\oint_\kappa \frac{dz}{z} = \oint_\gamma \frac{dz}{z}$ (ohne Benutzung der Konzepte aus 3.5). Folgern Sie aus dem Ergebnis, daß

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t} = \frac{2\pi}{ab}.$$

Aufgabe 4.2 Durch die Vorschrift $F(z) = \oint_{|w|=1} \frac{Re(w)}{w-z}\, dw$ wird im Inneren des Einheitskreises eine Funktion definiert. Geben Sie eine einfache Formel zu ihrer Berechnung an.
Hinweis: Auf dem Einheitskreis ist $\bar{w} = \frac{1}{w}$ also $Re(w) = \frac{1}{2}\left(w + \frac{1}{w}\right)$ und daher

$$\frac{Re(w)}{w-z} = \frac{1}{2}\left(\frac{w}{w-z} + \frac{1}{z(w-z)} - \frac{1}{zw}\right).$$

Integrieren Sie die Summanden einzeln, wobei eventuell die Cauchysche Formel hilfreich ist.
Wenn Ihr Ergebnis nicht $2\pi i Re(z)$ sein sollte, müssen Sie erklären, warum die Cauchysche Integralformel nicht unmittelbar anwendbar ist.

Aufgabe 4.3 Berechnen Sie das Umlaufintegral $\oint \frac{\cos^2(tz)}{z^3}\, dz$ wobei $t > 0$ und über den Einheitskreis integriert wird.
Hinweis: Wenn es zu Fuß nicht klappt, hilft die (verallgemeinerte) Cauchysche Integralformel rückwärts gelesen.

Für das Tutorium

Aufgabe 4.4 Es sei $0 < r < R$ und $f : \mathbb{C} \setminus \{0, R\} \to \mathbb{C}$ durch $f(z) = \frac{R+z}{(R-z)z}$ definiert.
Leiten Sie die Formel

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR\cos t + r^2}\, dt = 1$$

her, indem Sie $\oint_{|z|=r} f(z)\, dz$ auf zwei Weisen berechnen.

Aufgabe 4.5 Berechnen Sie einige der folgenden Integrale mit Hilfe der Cauchyschen Integralformeln (Details nachschlagen)

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{f(w)}{w-z}dw \quad \text{bzw. verallgemeinert} \quad f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\oint \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}dw.$$

$$(a)\ \int_{|z+1|=1} \frac{dz}{(z+1)(z-1)^3} \qquad (b)\ \int_{|z|=2} \frac{\sin z}{z+i}\, dz \qquad (c)\ \int_{|z+2i|=3} \frac{dz}{z^2+\pi^2}$$

$$(d)\ \int_{|z|=1/2} \frac{e^{1-z}}{z^3(1-z)}\, dz \qquad (e)\ \int_{|z-1|=1} \left(\frac{z}{z-1}\right)^n dz \qquad (f)\ \int_{|z|=r} \frac{dz}{(z-a)^2(z-b)^2}$$

Im letzten Integral soll $|a| < r < |b|$ sein.

Aufgabe 4.6 Stellen Sie fest, daß die Funktionen $\bar{z}$ und $\frac{1}{z}$ auf dem Einheitskreis (genauer: für $|z| = 1$ übereinstimmen.
Welche der folgenden Argumente sind schlüssig? (Alle Integrale über den Einheitskreis.)

(a) Da $\frac{1}{z}$ in allen Punkten des Einheitskreises differenzierbar ist, gilt das auch für $\bar{z}$.

(b) $\oint \frac{dz}{z} = \oint \bar{z}\, dz$ (der Wert ist $2\pi i$).

(c) $\frac{1}{z^2}$ hat eine Stammfunktion (nämlich $-\frac{1}{z}$), also hat auch die Einschränkung von $(\bar{z})^2$ auf den Einheitskreis eine Stammfunktion.

(d) Weil $\frac{1}{z^2}$ eine Stammfunktion hat, ist $\oint \frac{dz}{z^2} = 0$. Also ist auch $\oint \bar{z}^2\, dz = 0$.

(e) Die Funktionen $\frac{1}{z}$ und $\bar{z}$ können nicht beide auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ analytisch sein. Anderenfalls würde ihr Übereinstimmen auf dem Einheitskreis generelle Übereinstimmung nach sich ziehen (die nicht besteht, etwa in $z = 2$).

Das letzte Argument beruht auf dem Identitätssatz (4.2.2), der vielleicht noch nicht dran war.

Aufgabe 4.7 (Für Liebhaber zum Nachdenken)
$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ habe die reelle Decodiernung $f = u + iv$ mit C^1-Funktionen $u(x, y), v(x, y)$.
Angenommen $\lim_{r\to 0} \frac{1}{r^2} \oint_{|w-z|=r} f(w)\, dw = 0$ für alle z. Beweisen Sie, daß f holomorph ist.

Kommentar: Im Gegensatz zum Satz von Morera brauchen hier die $\oint$ nicht selbst zu verschwinden; sie müssen nur klein im Vergleich zum Radius des Kreises sein. Dafür muß allerdings die stetige Differenzierbarkeit von Real- und Imaginärteil vorausgesetzt werden.

Zum Beweis spalten Sie das Integral in Real- und Imaginärteil auf und verwandeln sie beide mit Green in Integrale über den Vollkreis.
Benutzen Sie, daß

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{r^2} \int\int_{K(z,r)} h(x, y) d(x, y) = \pi h(z)$$

(Begründung?). Dann sollten die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen dastehen.

5 Aufgaben zur Mathematikvorlesung für Physiker IV

Abgabe ausnahmsweise erst am 30 Mai vor der Vorlesung

Aufgabe 5.1 Warum gibt es keine analytische Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(\frac{1}{2n}) = \frac{1}{n}$ und $f(\frac{1}{2n+1}) = \frac{1}{n^2}$ jeweils für alle $n = 1, 2, 3, \ldots$?

Aufgabe 5.2 Bestimmen Sie das Betragsmaximum von $h(z) = z^2 + z - 1$ im abgeschlossenen Einheitskreis $\bar{K}(0, 1)$.

Aufgabe 5.3 Die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sei ganz und $z_1 \neq z_2$ zwei komplexe Zahlen.

(a) Berechnen Sie $\displaystyle\oint_{|z|=R} \frac{f(z)}{(z - z_1)(z - z_2)}\, dz$ für $R > |z_1|, |z_2|$.

Hinweis: Zerlegen Sie den Integranden in eine Summe aus zwei Brüchen mit den Nennern $z - z_1$ bzw $z - z_2$.

(b) Nehmen Sie jetzt an, daß f beschränkt ist und zeigen Sie unabhängig von (a), daß

$$\lim_{R\to\infty} \oint_{|z|=R} \frac{f(z)}{(z - z_1)(z - z_2)}\, dz = 0.$$

(c) Kombinieren Sie (a) und (b) zu einem neuen Beweis des Satzes von Liouville, daß beschränkte ganze Funktionen konstant sein müssen.

Aufgabe 5.4 Beweisen Sie, daß eine ganze Funktion entweder konstant ist oder Funktionswerte in jeder offenen Kreisscheibe annimmt. Mathematischer gesagt: $f(\mathbb{C})$ ist entweder einpunktig oder eine dichte Teilmenge von $\mathbb{C}$. Zusatzfrage: Kann $f(\mathbb{C})$ abzählbar unendlich sein?
Hinweis: Die Annahme, daß f keinen Wert in der Kreisscheibe $K(w, r)$ annimmt, führt über eine passende Hilfsfunktion mit Liouville auf die Konstanz von f.

Für die Tutorien

Aufgabe 5.5 $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ seien analytisch und $f(g(z)) = 0$ für alle z.
Zeigen Sie, daß entweder g konstant ist oder f konstant gleich Null.

Aufgabe 5.6 Bestimmen Sie das Betragsmaximum von $f(z) = exp(z^2)$ und $g(z) = \frac{z+3}{z-3}$ im abgeschlossenen Einheitskreis $\bar{K}(0, 1)$.

Aufgabe 5.7 Finden Sie alle ganzen Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit

$$f(0) = 0, \quad f(i) = -2, \quad \text{und} \quad |f'(z)| \leq 6\,|z| \text{ für alle } z.$$

Aufgabe 5.8 Es seien $f, g : \bar{K}(0, R) \to \mathbb{C}\setminus\{0\}$ stetige Funktionen, die im Inneren der Kreisscheibe analytisch sind. Wenn $|f(z)| = |g(z)|$ für alle Randpunkte, so ist $f = e^{i\varphi} g$ für ein geeignetes (von z unabhängiges) φ.
Das gilt nicht mehr, wenn eine der beiden Funktionen eine Nullstelle hat. Beispiel?

Aufgabe 5.9 In der geschlitzten Ebene $G = \mathbb{C} \setminus \{t \in \mathbb{R} : t \leq 0\}$ definieren wir die Funktion L durch die Festsetzung

$$L(z) := \int_1^z \frac{dw}{w}$$

wobei über die Strecke von 1 nach z integriert wird.

(a) Warum kann man statt der Strecke auch jede andere in G von 1 nach z verlaufende Kurve benutzen?

(b) Finden Sie die Koeffizienten der Potenzreihenentwicklungen von L in 1 und i.

(c) Beweisen Sie $e^{L(z)} = z$ für alle $z \in G$.

Die Funktion L heißt *Hauptzweig* des Logarithmus.
Hinweise: Um Potenzreihe im Entwicklungspunkt 1 zu erhalten, schreibe man das Integral mit Hilfe der Parametrisierung $t \mapsto 1 + t(z-1)$ explizit hin und entwickele den Integranden in eine geometrische Reihe, die dann gliedweise integriert werden darf. Als Ergebnis kommt, wenig verwunderlich, die Logarithmusreihe aus dem ersten Semester heraus.
Für den Entwicklungspunkt i bemerke man zunächst $\int_1^z = \int_1^i + \int_i^z$. Das erste Integral kann man leicht ausrechenen, wenn statt der Strecke der Viertelkreis als Kurve benutzt wird. Das zweite Integral geht nach demselben Schema (geometrische Reihe integrieren) wie oben.
Für Teil (c) benutzt man den Identitätssatz um die Gleichung von $]0,2[$ auf G fortzuschreiben.

Aufgabe 5.10 (Perioden ganzer Funktionen) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sei eine ganze Funktion und

$$P_f = \{p \in \mathbb{C} : f(z+p) = f(z) \text{ für alle } z\}$$

die Menge ihrer Perioden (bequemerweise zählen wir $p = 0$ dazu). Beweisen Sie, daß genau drei Fälle möglich sind:

$$P_f = \{0\}, \quad P_f = \mathbb{C} \quad \text{oder} \quad P_f = \{kp_0 : k \in \mathbb{Z}\} \text{ für eine geeignete 'kleinste' Periode } p_0.$$

Geben Sie für jeden de drei Fälle ein Beispiel an.
Hinweis: Vielleicht kommen Sie auf die richtige Idee wenn Sie zuerst überlegen, warum es nicht gleichzeitig eine reelle und eine reinimaginäre Periode geben kann.

Aufgabe 5.11 (Satz von Gauss-Lucas) $p(z)$ sei ein komplexes Polynom vom Grade $n \geq 1$ mit den Nullstellen $b_1, b_2 \ldots, b_n$ (nicht notwendig paarweise verschieden).

(a) Überprüfen Sie, daß für alle $z \notin \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ gilt

$$\frac{p'(z)}{p(z)} = \frac{1}{z-b_1} + \frac{1}{z-b_2} + \ldots + \frac{1}{z-b_n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\overline{z-b_k}}{|z-b_k|^2}$$

(b) Folgern Sie, daß jede Nullstelle c von $p'(z)$ sich als konvexe Kombination der Nullstellen von $p(z)$ schreiben läßt, d.h. $c = t_1 b_2 + t_2 b_2 + \ldots + t_n b_n$ mit $t_1, t_2, \ldots, t_n \geq 0$ und $\sum_{k=1}^{n} t_k = 1$.

Die Nullstellen von p' liegen also in der konvexen Hülle der Nullstellenmenge von p.

Aufgabe 5.12 Betrachtet wird die Potenzreihe $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} z^{k!}$.

(a) Begründen Sie, daß der Konvergenzradius 1 ist.

(b) Sei $z = e^{i\pi t}$ ein Punkt auf dem Einheitskreis mit rationalem t. Zeigen Sie, daß die Potenzreihe in diesem Punkt divergiert. Hinweis: Schreiben Sie $t = \frac{p}{q}$ und bestimmen Sie $z^{k!}$ für $k \geq q$.

(c) f sei die auf $K(0,1)$ definierte analytische Funktion und z wie eben. Zeigen Sie $\lim_{r \nearrow 1} |f(rz)| = \infty$.

Schließen Sie, daß es keine analytische Funktion geben kann, die f auf eine den Einheitskreis echt umfassende offenen Menge fortsetzt.

6 Aufgaben zur Mathematikvorlesung für Physiker IV

Zur Abgabe am 8. Juni vor der Vorlesung

Aufgabe 6.1 Benutzen Sie den Residuensatz zur Berechnung der Integrale

$$\oint_{|z|=1} \frac{z\,dz}{z^2+2} \qquad \text{und} \qquad \oint_{|z|=2} \frac{z\,dz}{z^2+2}.$$

Aufgabe 6.2 f sei in einer offenen Menge analytisch, die das reelle Intervall $[a,b]$ enthält und nehme auf diesem Intervall nur reelle Werte an. γ sei eine einfach geschlossene Kurve, die dieses Intervall einmal im positiven Sinn umkreist. Zeigen Sie, daß es ein $c \in]a,b[$ derart gibt, daß

$$\oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)\cdot(z-b)}\,dz = \oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-c)^2}\,dz.$$

Hinweis: Werten Sie beide Seiten nach Residuensatz aus und begründen Sie, daß ein c gefunden werden kann, das der entstehenden Bedingung genügt.

Für das Tutorium und als Klausurvorbereitung

Aufgabe 6.3 Die folgenden Funktionen sollen auf den maximal sinnvollen Definitionsbereichen betrachtet werden und haben dann alle eine isolierte Singularität im Nullpunkt. Welcher Art? Welche Residuen?

$$\frac{e^z}{z^7}, \quad \frac{e^z-1}{z}, \quad \frac{\cos z}{z}, \quad \frac{(e^z-1)^2}{z^2}, \quad \frac{\cos z - 1}{z^2}.$$

Aufgabe 6.4 Berechnen Sie mit Hilfe des Residuensatzes:

$$\int_{|z+2i|=25} \frac{z^2}{z^2+\pi^2}\,dz \qquad \text{und} \qquad \int_{|z|=R} \frac{dz}{(z-a)^2(z-b)^2}$$

Im letzten Integral soll $R > |a| + |b|$ sein.

Aufgabe 6.5 Geben Sie jeweils eine LAURENT-Reihe an, deren Konvergenzgebiete

(a) die ganzen Ebene, (b) die leere Menge, (c) die punktierte Ebene $\mathbb{C} \setminus \{0\}$,
(d) der offene Kreisring $2 < |z| < 3$ und (e) die Einheitskreislinie $|z| = 1$

ist.

Aufgabe 6.6 Entwickeln Sie die durch $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$ definierte Funktion in den folgenden Kreisringen jeweils in eine LAURENT-Reihe.

$$0 < |z| < 1, \qquad 1 < |z| < 2, \qquad 2 < |z| < \infty, \qquad 0 < |z-1| < 1 \quad \text{und } 0 < |z-2| < 1.$$

7 Aufgaben zur Mathematikvorlesung für Physiker IV

Zur Abgabe am 20. Juni vor der Vorlesung

Aufgabe 7.1 (Letzte Aufgabe zur Funktionentheorie)
Berechnen Sie $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\,dx$, wobei $a > b > 0$.

Aufgabe 7.2 Angenommen $y = \sin x$ löst die DGL $F(y, y', y'', y''') = 0$. Welche der folgenden Funktionen ist dann (unabhängig von F) auch Lösung und warum:

$$\sin 2x, \quad \sin(x+2), \quad 2+\sin x, \quad \cos x?$$

Hinweis: Man beachte, daß x in der DGL nicht explizit vorkommt.

Aufgabe 7.3 Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = \frac{-2xy}{1+x^2} + \frac{2x^2}{1+x^2}, \qquad y(1) = 2.$$

Aufgabe 7.4 Angenommen, die Funktion g ist auf dem Intervall I nicht konstant Null. Zeigen Sie, daß die lineare DGL $y' = h(x)y + g(x)$ (g, h stetig auf I) wenigstens eine Lösung hat, die im Intervall I das Vorzeichen wechselt.
Hinweis: Betrachten Sie die Lösung des AWP $y(x_0) = 0$ für ein x_0 mit (oBdA) $g(x_0) > 0$.

Für das Tutorium

Aufgabe 7.5 (Alternativer Ansatz)
Vorglegt sei die lineare Differentialgleichung $y' = gy + h$. Der Ansatz $y(x) = u(x) \cdot v(x)$ führt auf

$$u'v + uv' = guv + h \qquad \text{also} \qquad v' = \left(g - \frac{u'}{u}\right) v + \frac{h}{u}$$

Die Idee besteht darin zunächst u so zu bestimmen, daß $(\ldots)$ wegfällt. Danach dann v aus dem Rest der Gleichung.
Führen Sie das aus und leiten Sie die Lösungsformel (noch einmal) her.

Aufgabe 7.6 Bestimmen Sie die allgemeine Lösung von $y' \cos x + y \sin x = 1$.

Aufgabe 7.7 Gegeben seien differenzierbare Funktionen $\varphi, \psi : [a, b] \to \mathbb{R}$, wobei $\psi(x) \neq 0$ für alle $x \in [a, b]$.
Zeigen Sie, daß es eine lineare Differentialgleichung $y' = a(x)y + b(x)$ gibt, deren Lösungen gerade die Gesamtheit aller Funktionen $\varphi + C\psi$ mit $C \in \mathbb{R}$ ist.

Aufgabe 7.8 Die Funktionen φ_1, φ_2 und $\varphi_3 : [a, b] \to \mathbb{R}$ seien Lösungen der linearen DGL $y' = g(x) \cdot y + h(x)$ (mit stetigen g, h). Angenommen $\varphi_1(a) < \varphi_2(a) < \varphi_3(a)$.
Zeigen Sie, daß dann

(a) $\varphi_1(x) < \varphi_2(x) < \varphi_3(x)$ für alle $x \in [a, b]$ gilt.

(b) der Punkt $\varphi_2(x)$ das Intervall $[\varphi_1(x), \varphi_3(x)]$ in einem konstanten Verhältnis teilt.

Hinweis: Es braucht nur (b) bewiesen zu werden, weil (a) unmittelbar daraus folgt.

Aufgabe 7.9 (wenn noch Zeit ist) Angenommen $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ erfüllen $f(x, y) < g(x, y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Weiter seien $\varphi, \psi : [a, b] \to \mathbb{R}$ Lösungen der Differentialgleichungen $y' = f(x, y)$ bzw. $y' = g(x, y)$ mit $\varphi(a) \leq \psi(a)$. Beweisen Sie, daß dann $\varphi(x) \leq \psi(x)$ für alle $x \in [a, b]$ gilt.

Hinweis: Man argumentiert indirekt und betrachtet den hypothetischen Punkt
$x_0 = \inf\{x \in [a, b] : \varphi(x) > \psi(x)\}$. Was kann man über $\varphi(x_0)$ und $\psi(x_0)$ sagen und in welchem Tempo verändern sich diese Werte?

Die Aussage gilt nicht mehr, wenn die Voraussetzung zu $f(x, y) \leq g(x, y)$ abgeschwächt wird. Was kann dann passieren? Konstruieren Sie ein Beispiel.

Wer Lust hat, noch weitere Integrale auszurechnen

kann sich ohne Abgabe und Punkte an den folgenden versuchen.

Aufgabe 7.10 Für eine komplexe Zahl a mit $|a| < 1$ ist das Integral $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{1 - 2a \cos t + a^2}$ nach der Methode aus 5.6.3 zu berechnen. Meine Lösung $\frac{2\pi}{1-a^2}$

Aufgabe 7.11 Prüfen Sie, daß $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos 2\pi x}{x^4 + x^2 + 1} = -\frac{\pi}{2\sqrt{3}} e^{-\pi\sqrt{3}}.$

8 Aufgaben zur Mathematikvorlesung für Physiker IV

Zur Abgabe am 27. 6. vor der Vorlesung

Aufgabe 8.1 Lösen Sie das AWP: $xy(1+x^2)y' = 1+y^2, \quad y(1)=2.$
In welchem Intervall ist die Lösung definiert? Gibt es Lösungen der DGL, die auf ganz $\mathbb{R}$ definiert sind?

Aufgabe 8.2 Weisen Sie nach, daß das AWP $y' = -\dfrac{x}{\sqrt{y}+1}, \quad y(0)=0$ keine Lösung besitzt, obwohl es sich um ein System mit getrennten Variablen handelt und $g(y_0) = \frac{1}{\sqrt{0}+1} = 1 \neq 0$ ist. Wieso widerspricht das nicht dem Satz über die Existenz und Eindeutigkeit (2.2.3)?

Aufgabe 8.3 Finden Sie die Gleichung $y = f(x)$ einer im ersten Quadranten verlaufenden Kurve, die

(a) durch den Punkt $(24, 3)$ geht und

(b) die Eigenschaft besitzt, daß die Schnittpunkte jeder Tangente mit den Koordinatenachsen gleichweit vom Berührungspunkt entfernt sind.

Aufgabe 8.4 Prüfen Sie, daß

$$\frac{2x}{y^3}\,dx + \frac{y^2-3x^2}{y^4}\,dy = 0$$

exakt ist und finden Sie eine Integralkurve durch den Punkt $(1, 1)$.

Für das Tutorium

Aufgabe 8.5 Betrachtet wird die DGL $y' = e^y \sin x$.

(a) Bestimmen Sie die Lösung des allgemeinen AWP $y(x_0) = y_0$.

(b) Skizzieren Sie die Lösungen der AWPs $y(0) = 0$ und $y(\pi) = 0$.

(c) Für welche y_0 hat das AWP $y(0) = y_0$ eine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Lösung?

Aufgabe 8.6 Gesucht ist die Gleichung $y = y(x)$ einer Kurve im ersten Quadranten mit folgender Eigenschaft: Ist P ein Kurvenpunkt, Q der Fußpunkt des Lotes von P auf der x-Achse und R der Schnittpunkt der in P angelegten Tangente mit der y-Achse, so steht $\overline{OP}$ senkrecht auf $\overline{QR}$ (O ist der Koordinatenursprung).
Hinweis: Stellen Sie eine Differentialgleichung auf und lösen Sie diese. Die Substitution $y = z(x)x$ ist dabei hilfreich (z eine neue gesuchte Funktion).

Aufgabe 8.7 Untersucht wird die im ersten Quadranten gegebene Differentialgleichung $y' = y - y^2 - p$, wo p ein positiver Parameter ist.
Weisen Sie ohne die Gleichung zu lösen nach, daß

(a) für $p \geq \frac{1}{4}$ alle Lösungen monoton fallend sind, falls $p > \frac{1}{4}$ sogar streng fallend.

(b) für $p > \frac{1}{4}$ keine Lösung für alle $x \geq 0$ definiert ist (wir suchen Funktionen mit Werten ≥ 0!)

Für $p = \frac{1}{4}$ läßt sich die Gleichung leicht lösen. Skizzieren Sie einige typische Integralkurven.

Aufgabe 8.8 Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der DGL

$$y' = \frac{y}{x - 2x^2 y}$$

Hinweis: Es gibt einen nur von x abhängigen integrierenden Faktor.

9 Aufgaben zur Mathematikvorlesung für Physiker IV

Zur Abgabe am 4. Juli vor der Vorlesung

Aufgabe 9.1 Lösen Sie das AWP

$$y' = xy + x^3 \quad y(0) = 0$$

(a) exakt (lineare DGL),

(b) durch PICARD-Iteration (bis φ_3 mit $\varphi_0 = 0$ beginnend)

Vergleichen Sie φ_3 mit einem Anfangsstück der Taylorreihe der exakten Lösung.

Aufgabe 9.2 Betrachtet wird die DGL $y'' = 2(y')^3$. Die rechte Seite $f(x, y, y') = 2y'^3$ ist stetig und beliebig oft stetig nach allen Variablen differenzierbar (daher lokale LIPSCHITZ-Bedingung). Also sollten PICARD-LINDELÖF und PEANO anwendbar sein.
Durch den Punkt $(0, 0)$ gehen mindestens die drei Integralkurven $y_1 = 0$, $y_2 = \sqrt{4-x}-2$ und $y_3 = 6 - \sqrt{36-x}$ (Prüfen aber nicht abgeben). Die beiden letzteren lassen sich nicht über den Punkt $(4, -2)$ bzw. $(36, 6)$ hinaus verlängern, brechen also mitten in der Ebene ab (und nicht am Rand). Erklären Sie die scheinbare Diskrepanz zur Theorie von Abschnitt 3.4 bzw. 3.5.

Aufgabe 9.3 Lösen Sie das AWP

$$\begin{array}{rcrcll} y_1' & = & \frac{x+1}{x-1}y_1 & + & y_2 & -(x-1)^2 \\ y_2' & = & y_1 & + & y_2 & \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} y_1(0) & = & 1 \\ y_2(0) & = & -2 \end{array}$$

Um Ihnen Zeit zu sparen, verrate ich eine Lösung des homogenen Systems: $y_1 = x - 1$, $y_2 = -x$. Der Rest läßt sich dann (wenn auch etwas umständlich) ausrechnen: D'ALEMBERTsche Reduktion und Variation der Konstanten.

Für das Tutorium

Aufgabe 9.4 Berechnen Sie die ersten drei Picard-Iterationen (mit $\varphi_0 = 0$ beginnend) für das AWP $y' = x^2 + y^2 \quad y(0) = 0$.
Erfüllt die rechte Seite auf $[-1, 1] \times \mathbb{R}$ eine Lipschitz-Bedingung?
Was kann man daher von der Iterationsfolge für ein Konvergenzverhalten erwarten?

Aufgabe 9.5 Lösen Sie das für $x > 0$ vorgelegte lineare DGLS

$$\begin{array}{rcrcrl} y' & = & \frac{5x^2+1}{x(x^2+1)}y & - & \frac{1+3x^2}{x^2}z & +x \\ z' & = & \frac{6x^2+2}{(x^2+1)^2}y & - & \frac{5x^2+1}{x(x^2+1)}z & +\frac{1}{x} \end{array}$$

Für das homogene System ist $y = x^2+1, \quad z = x$ eine Lösung, die zu erraten (eventuell qualifiziert mit Potenzreihenansatz) ich Ihnen erspare (Aber Nachrechnen, Gefahr von Tippfehlern!).

Aufgabe 9.6 Gegeben seien drei ansonsten beliebige dreimal stetig differenzierbare reelle Funktionen $f, g, h : I \to \mathbb{R}$ (I ein Intervall). Ihre WRONSKI-Determinante ist definiert als

$$W(x) := \begin{vmatrix} f & g & h \\ f' & g' & h' \\ f'' & g'' & h'' \end{vmatrix}$$

Welche Implikationen gelten zwischen den folgenden drei Aussagen?

(a) Die drei Funktionen sind linear unabhängig.

(b) Es gibt ein $x_0 in I$ mit $W(x_0) \neq 0$.

(c) $W(x)$ hat keine Nullstellle in I.

Was ändert sich, wenn zusätzlich vorausgesetzt wird, daß f, g, h Lösungen einer homogenen linearen Differentialgleichung dritter (bzw. vierter) Ordnung sind?

Als **Klausurtermin (2. Halbzeit)** habe ich mich jetzt für den 11. Juli entschieden. Es wird voraussichtlich in zwei Gruppen (12-13, 13-14) während der Vorlesungszeit geschrieben. Ich bitte um dieselbe Gruppeneinteilung wie beim ersten Mal (Mi, Fr).

10 Aufgaben zur Mathematikvorlesung für Physiker IV

Zur Abgabe am 13. Juli vor der Vorlesung

(Aber sinnvollerweise vor der Klausur bearbeiten)

Aufgabe 10.1 Bestimmen Sie eine zu $\frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ linear unabhängige zweite Lösung der für $x > 0$ definierten homogenen linearen DGL (vgl Skript 4.2.6 oder 4.7.2)

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{1}{4x^2}\right) y = 0.$$

Aufgabe 10.2 Finden Sie die allgemeine Lösung der linearen DGL

$$y'' + 2y' + y = 6e^{-x}.$$

Aufgabe 10.3 Finden Sie die allgemeine Lösung des Systems

$$y_1' = y_2 - y_3, \quad y_2' = y_3 - y_2, \quad y_3' = y_1 - y_2$$

Aufgabe 10.4 Eine homogene lineare DGL zweiter Ordnung

$$(*) \quad p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y = 0$$

heißt *exakt*, wenn sie in der Form $\Big(a(x)y' + b(x)y\Big)' = 0$ geschrieben werden kann. Für diese lassen sich alle Lösungen aus DGLen erster Ordnung $ay' + by = C$ mit Konstanten C bestimmen.

(a) Beweisen Sie, daß$(*)$ genau dann exakt ist, wenn $p'' - q' + r = 0$.

(b) Was versteht man wohl unter einem integrierenden Faktor und als Lösung welcher DGL könnte man ihn bekommen?

(c) Finden Sie ein Fundamentalsystem für die exakte DGL

$$x^2y'' + 3xy' + y = 0.$$

Achtung: Die Klausur am 11. Juli kann von allen gleichzeitig 12 -13 im

großen Hörsaal

geschrieben werden.

Für das Tutorium

Aufgabe 10.5 Leiten Sie eine Formel her, mit der aus einer Lösung u von $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ eine zweite linear unabhängige Lösung gefunden werden kann (vgl. auch Skript 4.2.7).
Bestimmen Sie mit Hilfe dieser Formel eine zu x linear unabhängige zweite Lösung der für $x \in]-1,1[$ definierten homogenen linearen DGL $\quad (1-x^2)y''-2xy'+2y=0$.

Aufgabe 10.6 Finden Sie die allgemeine Lösung der linearen DGL

$$y''+y'-6y=5e^{-3x}.$$

Aufgabe 10.7 Finden Sie ein Fundamentalsystem für die DGL $x^2y''+4xy'-y=0$.
Hinweis: Setzen Sie $x=e^t$ und bestimmen Sie $z(t)=y(e^t)$.

Aufgabe 10.8 Finden Sie die allgemeine Lösung des Systems

$$y_1'=2y_1-2y_2+y_3, \quad y_2'=y_1+5y_2-y_3, \quad y_3'=2y_1+4y_2+y_3.$$

Aufgabe 10.9 Diskutieren Sie die sogenannte EULER-CAUCHY-Gleichung:

$$x^2y''+pxy'+qy=f(x) \qquad p,q \text{ konstant}$$

(a) Der Ansatz $y=x^k$ führt auf eine quadratische Gleichung für k.

(b) Hat diese zwei verschiedene reelle Lösungen, so sind x^{k_1} und x^{k_2} ein Fundamentalsystem.

(c) Ist $k \in \mathbb{R}$ doppelte Lösung der quadratischen Gleichung, so gibt es nur eine Potenzfunktion x^k und das D'ALEMBERTsche Verfahen führt zur linear unabhängigen Lösung $x^k \log x$ (Entweder nachvollziehen oder durch Einsetzen in die Gleichung bestätigen).

(d) Sind $k_\pm = a \pm ib$ ein Paar konjugiert komplexer Lösungen der quadratischen Gleichung, so trennt man in x^k Real- und Imaginärteil um auf ein Fundamentalsystem zu kommen: $x^a \cos(b \log x), \quad x^a \sin(b \log x)$.

Aufgabe 10.10 Finden Sie jeweils ein Fundamentalsystem für die Gleichungen

$$2x^2y''+2xy'-y=0, \quad x^2y''+3xy'+y=0 \quad \text{und} \quad x^2y''-xy'+5y=0.$$