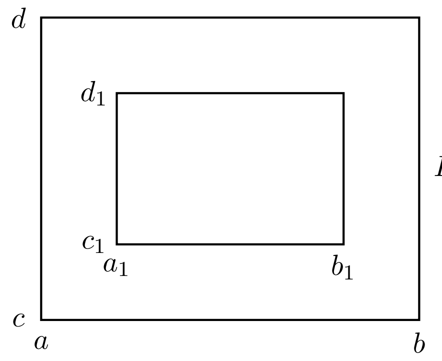
Heiko Dumlich, Max Hoffmann 19. Dezember 2006

9 Übungsblatt Mathematik für Physiker III

9.1 Ineinanderliegende Rechtecke



$$R = [a,b] \times [c,d]$$

$$R_1 = [a_1,b_1] \times [c_1,d_1]$$

$$R_1 \subseteq R$$

Es ist zu zeigen, dass wenn $f : R \to \mathbb{R}$, über R integrierbar ist, dieses f dann auch über R_1 integrierbar ist.

Nach Voraussetzung ist f auf R integrierbar, das heißt es existieren die Treppenfunktion mit

$$\varphi \leq f \qquad \psi \geq f, \tag{1}$$

so dass

$$\int_R f = \sup \{I(\varphi)\} = \inf \{I(\psi)\}$$

mit der Definition für das Integral einer Treppenfunktion ζ

$$I(\zeta) = \sum_{ij} \zeta_{ij} |R_{ij}|$$

wobei $|R_{ij}|$ der Fläche des Rechtecks in der i-ten Zeile und der j-ten Spalte einer entsprechend geeigneten Unterteilung des Integrationsgebietes entspricht.

Unterteilt man das Rechteck R entlang der Kanten von R_1 verändert eine auf R definierte Treppenfunktion ihre Werte an einer bestimmten Stelle nicht. Nur die Anzahl der Rechtecke wird eventuell größer.

Auf dieser neuen Unterteilung definieren wir die Funktionen

$$\psi_{R_1} : R_1 \to \mathbb{R} \qquad \psi_{\tilde{R}} : R \backslash R_1 \to \mathbb{R}$$
$$\varphi_{R_1} : R_1 \to \mathbb{R} \qquad \varphi_{\tilde{R}} : R \backslash R_1 \to \mathbb{R}$$

die für jede Stelle in ihrem Definitionsbereich den Funktionswert annehmen, den die jeweilige Funktion ohne Index an der gleichen Stelle annimmt. Es gilt also:

$$\begin{aligned} I(\varphi) &= \sum_{ij} \varphi_{ij} |R_{ij}| \\ &= \sum_{ij:R_{ij}\in R_1} \varphi_{ij} |R_{ij}| + \sum_{ij:R_{ij}\in R\setminus R_1} \varphi_{ij} |R_{ij}| \\ &= I_{R_1}(\varphi_{R_1}) + I_{\tilde{R}}(\varphi_{\tilde{R}}). \end{aligned} \tag{2}$$

Das gilt ganz analog auch für ψ. Dann gilt nach (1) bzw. $\varphi_{R_1} \le f_{R_1} \le \psi_{R_1}$ und $\varphi_{\tilde{R}} \le f_{\tilde{R}} \le \psi_{\tilde{R}}$

$$I_{R_1}(\varphi_{R_1}) \le \int_{R_1} f \le I_{R_1}(\psi_{R_1}) \text{ und } I_{\tilde{R}}(\varphi_{\tilde{R}}) \le \int_{\tilde{R}} f \le I_{\tilde{R}}(\psi_{\tilde{R}}).$$

Aus der Existenz der Abschätzung folgt die Integrierbarkeit.

9.2 Schwerpunkt eines Flächenstücks

Die Schwerpunktskoordinaten (x_c, y_c) eines mit Masse belegten Flächenstücks berechnen sich mit:

$$x_c = \frac{1}{M}\int\int x\cdot\mu(x,y)\,d(x,y) \quad \text{und} \quad y_c = \frac{1}{M}\int\int y\cdot\mu(x,y)\,d(x,y),$$

wobei $M = \int\int \mu(x,y)\,d(x,y)$ die Gesamtmasse der Fläche ist und $\mu(x,y)$ die Dichte im Punkt (x,y) bezeichnet. Es ist der Schwerpunkt des gleichmäßig belegten Flächenstücks ($\mu(x,y) = \mu$), das von den Geraden $y = 0$ und $x = 4$ und einem Bogen der Parabel $y^2 = 4x$ berandet wird, zu bestimmen. Berechnen wir zuerst die Gesamtmasse der Fläche, wobei diese von 0 bis 4 in der x-Koordinate und von 0 bis $\sqrt{4x}$ in der y-Koordinate gehe, wobei $y^2 = 4x \Rightarrow f(x) = \sqrt{4x}$. Somit folgt also:

$$M = \int_0^4\int_0^{2\sqrt{x}} \mu\,dxdy = 2\mu\int_0^4 \sqrt{x}\,dx = 2\mu\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^4 = \frac{4}{3}\cdot 2^3\mu = \frac{32}{3}\cdot\mu.$$

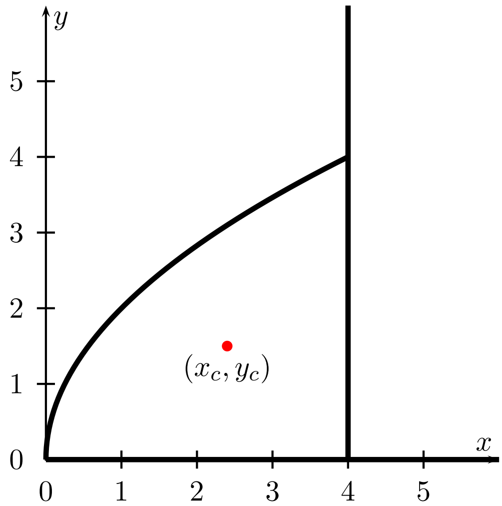
Nun sind die Schwerpunkte der Flächen zu berechnen, für diese ergibt sich:

$$x_c = \frac{3\mu}{32\cdot\mu}\int_0^4\int_0^{2\sqrt{x}} x\,dxdy = \frac{3}{32}\int_0^4 2\cdot x^{\frac{3}{2}}\,dx = \frac{3}{16}\left[\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right]_0^4 = \frac{3}{16}\frac{2}{5}2^5 = \frac{12}{5} = 2.4$$

und

$$y_c = \frac{3\mu}{32\cdot\mu}\int_0^4\int_0^{2\sqrt{x}} y\,dxdy = \frac{3}{32}\int_0^4\left[\frac{1}{2}y^2\right]_0^{2\sqrt{x}} dx = \frac{3}{32}\int_0^4 2\cdot x\,dx = \frac{3}{16}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^4 = \frac{3}{2}\cdot\frac{16}{16} = 1.5.$$

Der Schwerpunkt der massebehafteten Fläche liegt also in $P_c = (x_c, y_c) = (2.4, 1.5)$. Die folgende Skizze beschreibt die Fläche, bereits mit eingezeichnetem Schwerpunkt.



9.3 Volumen des Schnittes zweier Kreiszylinder

Die Kreiszylinder besitzen denselben Radius r und ihre Achsen schneiden sich senkrecht. Es ist das Volumen zu bestimmen. Für die Zylinder folgt:

$$\begin{aligned} Z_1 &= \left\{(x,y,z) : x^2 + y^2 \leq r^2\right\} \\ Z_2 &= \left\{(x,y,z) : y^2 + z^2 \leq r^2\right\} \end{aligned}$$

Das Volumen der Schnittmenge der Zylinder ergibt sich mit:

$$vol\,(Z_1 \cap Z_2) = \int\int\int_{Z_1 \cap Z_2} d\,(x,y,z)\,.$$

Aus den Ungleichungen leiten wir die Grenzen ab:

$$\begin{aligned} |y| &\leq r \\ |x| &\leq \sqrt{r^2 - y^2} \\ |z| &\leq \sqrt{r^2 - y^2}. \end{aligned}$$

Da die Grenzen von x und z von y abhängen, integrieren wir über y als letztes:

$$\begin{aligned} vol\,(Z_1 \cap Z_2) &= \int_{-r}^{r} dy \int_{-\sqrt{r^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-y^2}} dx \int_{-\sqrt{r^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-y^2}} dz \\ &= \int_{-r}^{r} dy \int_{-\sqrt{r^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-y^2}} dx\; 2\sqrt{r^2 - y^2} \\ &= 2\int_{-r}^{r} dy\; 2\left(r^2 - y^2\right) \\ &= 4\left[r^2 y - \frac{y^3}{3}\right]_{y=-r}^{r} \\ &= 4\left[2r^3 - \frac{2}{3}r^3\right] = \frac{16r^3}{3}. \end{aligned}$$

Das Volumen des Schnittes zweier Zylinder vom selben Radius r beträgt also:

$$V_{Z_1 \cap Z_2} = \frac{16}{3} r^3.$$

9.4 Volumen eines ellipsoiden Körpers

Es ist das Volumen des durch die Ungleichungen:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \quad \text{und} \quad 0 \leq z \leq \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b}\right)$$

definierten Körpers zu bestimmen. Wir transformieren die kartesischen Koordinaten auf folgende Weise:

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \to [0, \infty[\times [0, 2\pi[\times] - \infty, \infty[$$

$$\varphi : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} ar\cos\varphi \\ br\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}.$$

Um mit diesen Koordinaten integrieren zu können, berechnen wir zunächst die JAKOBI-Determinante dieser Abbildung:

$$\begin{aligned} J_\varphi &= \det \begin{pmatrix} a\cos\varphi & -ar\sin\varphi & 0 \\ b\sin\varphi & br\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= abr\cos^2\varphi + abr\sin^2\varphi = abr \end{aligned}$$

Jetzt können wir die Ungleichungen in diesen Koordinaten ausdrücken:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \rightsquigarrow r^2 \leq 1 \Rightarrow |r| \leq 1$$

$$0 \leq z \leq \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b}\right) \rightsquigarrow 0 \leq z \leq \frac{r^2}{2}\left(a\cos^2\varphi + b\sin^2\varphi\right).$$

Außerdem ist folgende Beziehung bei der Integration hilfreich:

- $\cos^2\varphi = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\varphi)$

$$\begin{aligned} 2\cos^2\varphi &= \cos^2\varphi + \cos^2\varphi \underbrace{+ \sin^2\varphi - \sin^2\varphi}_{=0} \\ &= \underbrace{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}_{=1} \underbrace{+ \cos^2\varphi - \sin^2\varphi}_{=\cos 2\varphi} \end{aligned}$$

Nun kann integriert werden:

$$
\begin{aligned}
V_{El.} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dr \int_0^{\frac{r^2}{2}\left(a\cos^2\varphi + b\sin^2\varphi\right)} dz\ abr \quad &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dr\ \frac{abr^3}{2}\left(a\cos^2\varphi + b\sin^2\varphi\right) \\
&= \int_0^{2\pi} d\varphi\ \frac{ab}{8}\left(a\cos^2\varphi + b\left(1-\cos^2\varphi\right)\right) \\
&= \frac{ab}{8}\int_0^{2\pi} d\varphi\ \left(b + \frac{(a-b)}{2}\left(1+\cos 2\varphi\right)\right) \\
&= \frac{ab}{8}\left[\left(b - \frac{b}{2}\right)\varphi + \frac{a}{2}\varphi + \frac{(a-b)}{2}\sin 2\varphi\right]_{\varphi=0}^{2\pi} \\
&= \frac{ab}{8}\left[b\pi + a\pi + 0\right] \\
&= \frac{ab\,(a+b)\,\pi}{8}.
\end{aligned}
$$

Das Volumen des Körpers beträgt also:

$$
V_{El.} = \frac{\pi}{8}\left[ab\,(a+b)\right].
$$