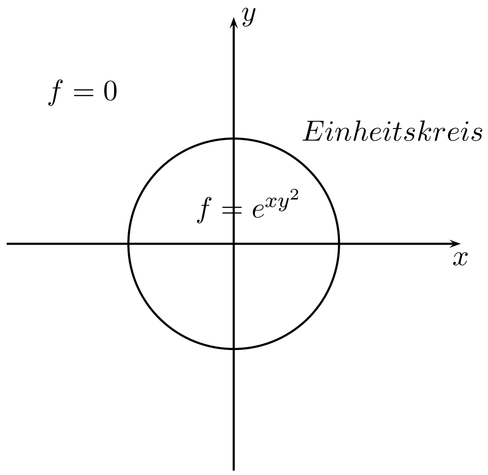
Heiko Dumlich, Max Hoffmann 12. Dezember 2006

8 Übungsblatt Mathematik für Physiker III

8.1 Zweistellige Funktion im Einheitskreis

Es sei $f(x,y) = e^{xy^2}$ im Einheitskreis $x^2 + y^2 \leq 1$ gegeben. Außerhalb von diesem sei die Funktion f konstant gleich Null.



Es werde für $-1 \leq x \leq 1$ definiert mit $F(x) = \int_{-1}^{1} f(x,y)\, dy$.

Wir erweitern die Definition auf die x-$y-$Ebene mit Hilfe der offenen Menge $D := \left\{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\right\}$:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ f : (x,y) &\mapsto \begin{cases} e^{xy^2} & (x,y) \in D \\ 0 & sonst \end{cases}. \end{aligned}$$

Jetzt kann man mit $y' = \sqrt{1-x^2}$ für $x \in]-1,1[$ ganz bequem schreiben:

$$F(x) = \int_{-y'}^{y'} e^{xy^2}\ dy.$$

Die Funktionen $\exp\left(xy^2\right)$ und $\sqrt{1-x^2}$ sind auf dem Intervall stetig, also ist auch das Integral stetig. Der Integrand ist in dem Bereich in dem wir ihn ableiten partiell stetig differenzierbar nach x. Daher können wir Leibniz anwenden und erhalten die Ableitung mit:

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{d}{dx} \int_{-y'}^{y'} e^{xy^2}\ dy = \int_{-y'}^{y'} \frac{\partial}{\partial x} e^{xy^2}\ dy \\ &= \int_{-y'}^{y'} y^2 e^{xy^2}\ dy \end{aligned}$$

Die Funktion $y^2e^{xy^2}$ist ein Produkt zweier stetiger Funktion, und daher selbst stetig. Das heißt, die $F(x)$ ist sogar stetig differenzierbar. Die Bestimmung der Funktionswerte im Punkt $x=0$ liefert:

$$\begin{aligned} F(0) &= \int_{-1}^{1} 1\,dy = [y]_{-1}^{1} = 2 \\ F'(0) &= \int_{-1}^{1} y^2\,dy = \left[\frac{1}{3}y^3\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

8.2 Formel von Frullani

Es ist die Formel von Frullani:

$$\int_0^\infty \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx = [f(0)-f(\infty)]\log\frac{a}{b} \qquad \text{wobei } f(\infty) := \lim_{x\to\infty} f(x),$$

herzuleiten.

Wir betrachten

$$f = f(tx) = f(u) \qquad \text{wobei } u = tx,$$

dann ist

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot t$$

und

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot x.$$

Wenn $x, t \neq 0$, dürfen wir durch x und t teilen und erhalten:

$$\frac{1}{t}\cdot\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x}\cdot\frac{\partial f}{\partial t}.$$

Fordert man, dass $f(xt)$und $\frac{\partial f}{\partial t}$ stetig sind, dann ist das Integral über ein ein offenes Intervall stetig und es gilt

$$\int_b^a \frac{\partial f}{\partial t}\,dt = f(ax) - f(bx)$$

setzen wir nach wie vor voraus, dass $x \neq 0$ ist, gilt:

$$\frac{f(ax)-f(bx)}{x} = \frac{1}{x}\int_b^a \frac{\partial f}{\partial t}\,dt.$$

Das alles eingesetzt, bringt:

$$\int_0^\infty \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx = \int_0^\infty \int_b^a \frac{1}{t}\cdot\frac{\partial f}{\partial x}\,dt\,dx$$

Fordert man ferner, dass

$$\int_0^\infty \int_b^a \frac{1}{t} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} \; dt$$

auf dem Intervall $[a, b]$ gleichmäßig konvergiert, darf FUBINI angewandt werden und man erhält:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{f(ax) - f(bx)}{x} \; dt &= \int_b^a \frac{1}{t} \int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial x} \; dx \; dt \\ &= \int_a^b \frac{1}{t} \left[-f(tx)\right]_{x=0}^\infty dt, \end{aligned}$$

hier haben wir die Integralgrenzen gedreht, um ein Minuszeichen zu erhalten. Fordern wir außerdem noch $a, b \neq 0$ (daraus folgt $t \neq 0$) erhält man:

$$\begin{aligned} &= [f(0) - f(\infty)] \int_a^b \frac{1}{t} \; dt \\ &= [f(0) - f(\infty)] \log \frac{b}{a} \end{aligned}$$

$\square$

8.3 2D Integralberechnung

$$\int_1^2 \int_1^x \frac{x}{y} \, dy \, dx = \int_1^2 x \left[\ln y\right]_1^x \; dx = \int_1^2 x \ln x \, dx,$$

Da die Grenze für das y-Integral von x abhängt, müssen wir zuerst die y Integration ausführen. Wir setzen vorraus, dass $x \neq 0$, sonst würde der Logarithmus nicht definiert sein. Wir können nun auch diese Integration ausführen, indem wir die partielle Integration benutzen:

$$\int_1^2 x \ln x \, dx = \left[\frac{1}{2} x^2 \ln x\right]_1^2 - \int_1^2 dx \, \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{2} x^2 = \left[\frac{1}{2} x^2 \ln x\right]_1^2 - \frac{1}{2} \int_1^2 dx \; \cdot x,$$

Dies können wir jetzt explizit aufschreiben und wir erhalten:

$$\int_1^2 \int_1^x \frac{x}{y} \, dy \, dx = \left[\frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{4} x^2\right]_1^2 = 2 \ln 2 - \frac{3}{4} = \ln 4 - \frac{3}{4}.$$

8.4 2D Integral mit Signum Funktion

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^1 (x+y) \cdot \operatorname{sign}(x-y)\, dx dy &= \int_0^1 \left[\int_0^x (x+y)\ dy + \int_x^1 (x+y) \cdot (-1)\ dy \right] dx \\
&= \int_0^1 \left(\left[xy + \frac{1}{2} y^2 \right]_{y=0}^{x} - \left[xy + \frac{1}{2} y^2 \right]_{y=x}^{1} \right) dx \\
&= \int_0^1 \left(\frac{3}{2} x^2 - x - \frac{1}{2} + \frac{3}{2} x^2 \right) dx \\
&= \int_0^1 \left(3x^2 - x - \frac{1}{2} \right) dx \\
&= \left[x^3 - \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} x \right]_0^1 \\
&= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \\
\int_0^1 \int_0^1 (x+y) \cdot \operatorname{sign}(x-y)\, dx dy &= 0.
\end{aligned}$$