Heiko Dumlich, Max Hoffmann 5. Dezember 2006

7 Übungsblatt Mathematik für Physiker III

7.1 Wärmeleitungsgleichung

Es ist zu zeigen, dass die Wärmeleitungsgleichung:

$$\frac{\partial f}{\partial t} - \Delta f = 0,$$

bzw.

$$\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0,$$

durch die Funktion:

$$f(x, y, z, t) = \sqrt{\frac{1}{t^3}} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2 + z^2}{4t}\right),$$

erfüllt wird. Hierzu berechnen wir die Ableitungen explizit:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{3}{2}\frac{1}{t^{\frac{5}{2}}} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2 + z^2}{4t}\right) - \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\left(-\frac{x^2 + y^2 + z^2}{4}\right)\frac{1}{t^2}\exp\left(-\frac{x^2 + y^2 + z^2}{4t}\right),$$

umgeschrieben zu:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \exp\left(-\frac{x^2 + y^2 + z^2}{4t}\right)\left[-\frac{3}{2}t^{-\frac{5}{2}} + \frac{1}{4}\left(x^2 + y^2 + z^2\right)t^{-\frac{7}{2}}\right].$$

Nun können wir eine der zweiten Richtungsableitungen berechnen, da alle Richtungen mit dieser Funktion äquivalent sind, wir berechnen zuerst die erste Ableitung:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\left(-\frac{2x}{4t}\right)\exp\left(-\frac{x^2 + y^2 + z^2}{4t}\right) = -\frac{x}{2}t^{-\frac{5}{2}}\exp\left(-\frac{x^2 + y^2 + z^2}{4t}\right).$$

Die zweite Ableitung liefert:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{1}{2}t^{-\frac{5}{2}}\exp\left(-\frac{x^2 + y^2 + z^2}{4t}\right) + \left(-\frac{x}{2t}\right)^2 t^{-\frac{3}{2}}\exp\left(-\frac{x^2 + y^2 + z^2}{4t}\right),$$

Nun erhalten wir, wenn wir unsere Ergebnisse einsetzen, wobei wir für den ersten Term einen Faktor 3 erhalten, da er für x, y, z Ableitung auftritt und für den zweiten erhalten wir anstatt des x^2 die jeweilige Komponente:

$$\exp\left(-\frac{x^2 + y^2 + z^2}{4t}\right)\left[-\frac{3}{2}t^{-\frac{5}{2}} + \frac{1}{4}\left(x^2 + y^2 + z^2\right)t^{-\frac{7}{2}} - \left\{-\frac{3}{2}t^{-\frac{5}{2}} + \frac{1}{4}\left(x^2 + y^2 + z^2\right)t^{-\frac{7}{2}}\right\}\right] = 0,$$

somit ist gezeigt, dass die Wärmeleitungsgleichung mit dieser Funktion erfüllt wird.

7.2 Beliebig oft differenzierbare Funktion

Gegeben ist

$$u\left(x,y,z\right)=f\left(xyz\right).$$

Davon bilden wir die Ableitung in jede Richtung:

- erst nach x ...

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}f\left(xyz\right)\\ &= f'\left(xyz\right)yz\end{aligned}$$

- ... dann nach y ...

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}f\left(xyz\right)\right)\\ &= \frac{\partial}{\partial y}\left(f'\left(xyz\right)yz\right)\\ &= f''\left(xyz\right)xyz^2+f'\left(xyz\right)z\end{aligned}$$

- ... und schließlich nach z

$$\begin{aligned}\frac{\partial^3 u}{\partial z\partial y\partial x} &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)\\ &= \frac{\partial}{\partial z}\left(f''\left(xyz\right)xyz^2+f'\left(xyz\right)z\right)\\ &= \left(xyz\right)^2 f'''\left(xyz\right)+3xyzf''\left(xyz\right)+f'\left(xyz\right).\end{aligned}$$

Da f beliebig oft differenzierbar ist (daraus folgt Stetigkeit), existiert $F\left(xyz\right)$ und lautet

$$F\left(xyz\right)=\left(xyz\right)^2 f'''\left(xyz\right)+3xyzf''\left(xyz\right)+f'\left(xyz\right).$$

7.3 Taylor-Polynom

Gegeben ist die Funktion x^y. Wir bilden das Taylor-Polynom 2. Grades für den Punkt $\bar{a}=(1,1)$ nach der Formel:

$$f\left(\bar{a}+\vec{v}\right)=f\left(\bar{a}\right)+\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial f\left(\bar{a}\right)}{\partial x_i}v_i+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2}\frac{\partial^2 f\left(\bar{a}\right)}{\partial x_i\partial x_j}v_iv_j+R_2\left(\vec{v}\right).$$

Die einzelnen Terme lauten

$$x^y\big|_{(1,1)}=1^1=1$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}x^y &= yx^{y-1}\\ \curvearrowright &= 1\cdot 1^{1-1}=1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x^2}x^y &= y\,(y-1)\,x^{y-2}\\ \curvearrowright &= 1\,(1-1)\,1^{1-2} = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}x^y &= \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{\ln(x^y)}\right)\\ &= \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{y\ln x}\right)\\ &= \ln(x)\,e^{y\ln x}\\ &= \ln(x)\,x^y\\ \curvearrowright &= \ln(1)\,1^1 = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial y^2}x^y &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\ln(x)\,e^{y\ln x}\right)\\ &= (\ln(x))^2\,x^y\\ &= (\ln(1))^2\,1^1 = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}x^y &= \frac{\partial^2}{\partial y\partial x}x^y\\ &= \frac{\partial}{\partial y}yx^{y-1}\\ &= \frac{\partial}{\partial y}ye^{(y-1)\ln(x)}\\ &= y\ln(x)\,e^{(y-1)\ln(x)} + e^{(y-1)\ln(x)}\\ &= y\ln(x)\,x^{y-1} + x^{y-1}\\ \curvearrowright &= 1\ln(1)\,1^{1-1} + 1^{1-1} = 1\end{aligned}$$

Und alles eingesetzt ergibt:

$$f(\vec{x}) = 1+(x-1)+(x-1)(y-1)+R_2\left(\vec{x}-\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right) = 1+(x-1)\,y+R_2\left(\vec{x}-\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right).$$

7.4 *Hesse*-Matrix

Es sind die Extremwerte der Funktion:

$$f(x,y,z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z},$$

mit $x, y, z > 0$ zu berechnen. Wir bilden zuerst die 1. Ableitungen:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 - \frac{y^2}{4x^2}, \quad \tfrac{\partial f}{\partial y} = \tfrac{y}{2x} - \tfrac{z^2}{y^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{2z}{y} - \frac{2}{z^2}.$$

Nullsetzen dieser liefert das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} y^2 &= 4x^2 \\ y^3 &= 2xz^2 \\ z^3 &= y \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich:

$$\begin{aligned} y &= \pm 2x \\ \pm 2x &= z \\ z^3 &= y \end{aligned}$$

Da $z = y$ und $z^3 = y$, müssen $z = y = 0$ oder $z = y = \pm 1$ gelten. Für den Fall $z = y = 0$, folgt auch $x = 0$, für den Fall $z = y = \pm 1$, folgt $x = \pm \frac{1}{2}$. Somit haben wir also 3 mögliche Extrempunkte $P_1 = (0,0,0)$, $P_2 = \left(\frac{1}{2}, 1, 1\right)$ und $P_3 = \left(-\frac{1}{2}, -1, -1\right)$, wobei wir jedoch, da nach Vorraussetzung $x, y, z > 0$ gilt, die Punkte P_1 und P_3 nicht betrachten. Wir bilden also die zweiten partiellen Ableitungen:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{y^2}{2x^3}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{1}{2x} + \frac{2z^2}{y^3}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{2}{y} + \frac{4}{z^3},$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -\frac{y}{2x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = -\frac{2z}{y^2}.$$

Für die Hesse-Matrix gilt:

$$H_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{y^2}{2x^3} & -\frac{y}{2x^2} & 0 \\ -\frac{y}{2x^2} & \frac{1}{2x} + \frac{2z^2}{y^3} & -\frac{2z}{y^2} \\ 0 & -\frac{2z}{y^2} & \frac{2}{y} + \frac{4}{z^3} \end{pmatrix},$$

wenn wir gleich unseren Punkt einsetzen, folgt:

$$H_f\left(\frac{1}{2}, 1, 1\right) = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

für die Determinanten ergeben sich:

$$\left| H_f\left(\frac{1}{2}, 1, 1\right) \right| = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 72 - 40 = 32 > 0,$$

$$\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 12 - 4 = 8 > 0,$$

$$|4| = 4 > 0,$$

die Matrix ist also positiv definit, daher liegt ein striktes lokales Minimum vor. Wir können also unseren Punkt einsetzen und erhalten als Ergebnis:

$$f\left(\frac{1}{2}, 1, 1\right) = 4.$$