Heiko Dumlich, Max Hoffmann 28. November 2006

6 Übungsblatt Mathematik für Physiker III

6.1 Größter Funktionswert im Quadrat

Der größte Funktionswert der Funktion:

$$f(x, y) = \sin x + \cos y + \cos(x - y),$$

ist im Quadrat $0 \leq x, y \leq \frac{\pi}{2}$ zu bestimmen. Für den Bereich kann die Gleichung $\cos x = \sin y$ nur durch $x = y = \frac{\pi}{4}$ erfüllt werden. Wir suchen die möglichen Extrempunkte des Quadrats, zuerst die inneren Punkte, wobei die Gleichungen:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

erfüllt sein müssen, dies führt auf:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 = \cos x - \sin(x - y) \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 0 = -\sin y + \sin(x - y).$$

Wenn man die Gleichungen addiert, erhält man die Bedingung

$$\cos x = \sin y.$$

Setzen wir diese Bedingung in unsere Zielfunktion ein, können wir diese entkoppeln, nach dem wir das Additionstheorem $\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$ anwenden.

$$\begin{aligned}
f(x, y) &= \sin x + \cos y + \cos(x - y) \\
&= \sin x + \cos y + \sin x \sin y + \cos x \cos y \\
&= \sin x + \cos y + \sin x \cos x + \sin y \cos x \\
& \underbrace{\sin x(1 + \cos x)}_{\equiv g(x)} + \underbrace{\cos y(1 + \sin y)}_{\equiv h(y)}
\end{aligned}$$

Als notwendige Bedingung für eine Extremstelle, müssen nun die partiellen Ableitungen von $g(x)$ und $h(y)$ beide verschwinden:ebe

$$\partial_x g(x) = \cos x(1 + \cos x) - \sin^2 x$$

führt auf

$$\cos x + \cos^2 x = \sin^2 x,$$

was erfüllt wird durch $x = \pi/3$. Die Lösung ist in dem gegeben Intervall aufgrund der strengen Monotonie der linken und rechten Terme eindeutig.

$$\partial_y h(y) = -\sin y(1 + \sin y) + \cos^2 y$$

führt auf

$$\cos^2 y = \sin y + \sin^2 y,$$

was erfüllt wird durch $y = \pi/6$. Die Lösung ist in dem gegeben Intervall aufgrund der strengen Monotonie der linken und rechten Terme eindeutig. Einfaches Einsetzen, zeigt uns, dass es sich um ein Maximum handelt. Der größte Funktionswert ist also:

$$f\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{6} + \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} \approx 2.598$$

6.2 Hadamardsche Ungleichung

Für die Determinante:

$$\begin{vmatrix} x & u \\ y & v \end{vmatrix} = xv - yu,$$

mit der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = u^2 + v^2 = 1$ sind das Maximum und Minimum zu bestimmen. Dies können wir als Extremstellenproblem der Zielfunktion $f(x, y, v, u) = xv - yu$, mit der Nebenbedingung $F(x, y, u, v) = 0$, wobei:

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^4 &\to \mathbb{R}^2 \\ F : (x, y, u, v) &\mapsto \begin{pmatrix} x^2 + y^2 - 1 \\ u^2 + v^2 - 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Zunächst überprüfen wir den Rang der Jakobi-Matrix, der Nebenbedingung:

$$J_f \begin{pmatrix} x^2 + y^2 - 1 \\ u^2 + v^2 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2u & 2v \end{pmatrix}.$$

Der Rang ist nur dann kleiner 2, wenn sowohl x oder y also auch u oder v gleich null sind. In dem Fall wird die Zielfunktion aber ebenfalls zu null und ist also für unsere Lösung nicht von Belang:

$$\begin{aligned} v &= 2\mu x && (1) \\ u &= -2\mu y && (2) \\ y &= -2\lambda u && (3) \\ x &= 2\lambda v && (4) \\ 0 &= x^2 + y^2 - 1 && (5) \\ 0 &= u^2 + v^2 - 1 && (6) \end{aligned}$$

Wenn wir (1) und (2) addieren, sowie (3) und (4) subtrahieren erhalten wir

$$\begin{aligned} u + v &= 2\mu(x - y) \\ x - y &= 2\lambda(u + v) \end{aligned}$$

Aus dem Vergleich folgt als allgemeine Lösung:

$$4\mu\lambda = 1.$$

Nun schreiben wir die Gleichungen (1)-(4) als homogenes lineares Gleichungsystem für x, y, u, v

$$\begin{pmatrix} -2\mu & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2\mu & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2\lambda \end{pmatrix}$$

$IV' = I + 2\mu * IV$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} -2\mu & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2\mu & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4\mu\lambda + 1 \end{pmatrix}$$

$III' = 2\mu * III - II$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} -2\mu & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2\mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4\mu\lambda - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4\mu\lambda + 1 \end{pmatrix}$$

Wählt man $4\mu\lambda = 1$, folgt $v = 0$, und aus (6) $u = \pm 1$. Daraus folgt $x = 0$ und aus (5) $y = \pm 1$.

$$|f(\pm 1, 0, 0, \pm 1)| = |f(0, \pm 1, \pm 1, 0)| = 1$$

Das Minimum der Zielfunktion ist also -1, das Maximum beträgt $+1$. Die HADAMARDschen Ungleichung

$$\det\left(\vec{a}, \vec{b}\right) \leq ||\vec{a}|| \left|\left|\vec{b}\right|\right|$$

kann man daraus folgendermaßen schließen. Zunächst setzen wir in die Zielfunktion (1) und (2) ein:

$$\begin{aligned} xv - yu &= x2\mu x + y2\lambda y \\ &= 2\left(\mu x^2 + \lambda y^2\right) \\ &= 2\left(\mu x^2 + \lambda\left(\underbrace{1}_{||\vec{a}||} - x^2\right)\right) \\ &= 2\left(\underbrace{x^2}_{\leq ||\vec{a}||}(\mu - \lambda) + \lambda\right) \\ &\leq 2\mu \end{aligned}$$

oder andersrum gerechnet

$$\begin{aligned} xv - yu &= 2\left(\mu x^2 + \lambda y^2\right) \\ &= 2\left(\mu\left(1-y^2\right) + \lambda y^2\right) \\ &= 2\left(y^2\left(\lambda - \mu\right) + \mu\right) \\ &\leq 2\lambda. \end{aligned}$$

Multipliziert man die beiden Ungleichungen miteinander erhält man

$$(xv - yu)^2 = 4\underbrace{\lambda\mu}_{=1/4} = 1.$$

Das gleiche gilt analog für u und v, also damit auch $\vec{b}$.

Allgemein lautet sie: Für die Vektoren $\vec{r_1}, \ldots, \vec{r_n} \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\det\left(\vec{r_1}, \ldots \vec{r_n}\right) \leq \prod_{i=1}^{n} ||\vec{r_i}||\,.$$

Geometrisch kann man das so ausdrücken: Betrachtet man die Determinante einer quadratischen Matrix, als das Volumen, des von den Spaltenvektoren aufgespannten Parallelograms wird, dann kann dieses Volumen nicht größer sein als das Produkt der Normen der Spaltenvektoren. „Oder effektvoller": das von den Vektoren $\vec{r_1}, \ldots, \vec{r_n}$ aufgespannte Volumen ist dann am größten, wenn alle Vektoren paarweise senkrecht aufeinander stehen.

6.3 Schnittkurve einer Kugel mit einer Ebene

Es gelten die folgenden Funktionen:

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= xyz \\ h(x,y,z) &= x^2 + y^2 + z^2 - 1 \\ g(x,y,z) &= x + y + z \end{aligned}$$

Für den Rang der JAKOBI-Matrix, der Nebenbedingung finden wir:

$$J_f \begin{pmatrix} x^2 + y^2 + z^2 - 1 \\ x + y + z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Diese hat also vollen Rang. Es gibt zwei Lagrangemultiplikatoren, die im Extrempunkt die Gleichung $\nabla f = \lambda \nabla g + \mu \nabla h$ erfüllen. Es ergeben sich die Bedingungen:

$$\begin{aligned} yz = \lambda 2x + \mu \quad &\Leftrightarrow \quad yz = \alpha x + \mu \\ xz = \lambda 2y + \mu \quad &\Leftrightarrow \quad xz = \alpha y + \mu \\ xy = \lambda 2z + \mu \quad &\Leftrightarrow \quad xy = \alpha z + \mu \\ x^2 + y^2 + z^2 \quad &= \quad 1 \\ x + y + z \quad &= \quad 0 \end{aligned}$$

wobei wir $2\lambda = \alpha$ gesetzt haben. Somit ergibt sich wenn man die ersten beiden Gleichungen voneinander abzieht:

$$z = -\alpha,$$

Dies können wir einsetzen und wir erhalten das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}
(y+x)\,z &= \mu \\
xy + z^2 &= \mu \\
x^2 + y^2 + z^2 &= 1 \\
x + y + z &= 0
\end{aligned}$$

Wir können nun die letzte Bedingung mit z multiplizieren und dann von der 1. Bedingung abziehen und erhalten:

$$-z^2 = \mu$$

Dieses können wir wieder einsetzen, wobei mir $z^2 = -\mu = \alpha^2$ auch $\alpha^2 = -\mu$ gilt:

$$\begin{aligned}
-\,(y+x)\,\alpha + \alpha^2 &= 0 \\
xy + 2\alpha^2 &= 0 \\
x^2 + y^2 + \alpha^2 &= 1 \\
x + y &= \alpha
\end{aligned}$$

Wie man sieht, sind die erste und letzte Gleichung linear abhängig und wir können eine verwerfen:

$$\begin{aligned}
xy + 2\alpha^2 &= 0 \\
x^2 + y^2 + \alpha^2 &= 1 \\
x + y &= \alpha
\end{aligned}$$

Nun können wir die letzte Zeile mit x, y multiplizieren und erhalten nach einsetzen der ersten Zeile:

$$\begin{aligned}
x^2 &= \alpha x + 2\alpha^2 \\
y^2 &= \alpha y + 2\alpha^2
\end{aligned}$$

Dies in die zweite Zeile eingesetzt liefert:

$$\alpha x + 2\alpha^2 + \alpha y + 2\alpha^2 + \alpha^2 = 1,$$

Nun können wir noch $(x+y)=\alpha$ einsetzen und erhalten:

$$6\alpha^2 = 1 \Leftrightarrow \alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}.$$

Nun müssen wir noch das Maximum und Minimum bestimmen, wobei die Funktion:

$$f(x,y,z) = xyz,$$

mit $xy = -2\alpha^2$, , und $z = -\alpha$ auf:

$$f(x,y,z) = \left(-2\alpha^2\right)(-\alpha) = 2\alpha^3 = \pm 2\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^3 = \pm 12\sqrt{6}.$$

Wir müssen nun noch prüfen, ob die Gradienten von g und h auf dem Kreis linear abhängig werden:

$$\nabla g = 2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \nabla h = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Diese sind linear abhängig für $x=y=z$. Da die Gleichung $x+y+z=0$ nur für $x=y=z=0$ erfüllt wird und dieser Punkt $f(x,y,z)=0$ liefern würde, haben wir oben bereits Maximum und Minimum gefunden.

6.4 Maximaler Wert für Winkel eines ebenen Dreiecks

Gesucht ist das Maximum für $\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma$ für die Winkel eines ebenen Dreiecks. Als Nebenbedingung gilt $\alpha+\beta+\gamma=\pi$. Wir besitzen die Funktionen:

$$\begin{aligned} f(\alpha,\beta,\gamma) &= \sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma \\ g(\alpha,\beta,\gamma) &= \alpha+\beta+\gamma-\pi = 0 \end{aligned}$$

Lagrangemultiplikatoren:

$$\begin{aligned} \cos\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma &= \lambda \\ \sin\alpha\cdot\cos\beta\cdot\sin\gamma &= \lambda \\ \sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\cos\gamma &= \lambda \\ \alpha+\beta+\gamma-\pi &= 0 \end{aligned}$$

Dies können wir durch gleichsetzen der λ-Terme vereinfachen zu (unter der Vorraussetzung, dass oBdA $\gamma,\alpha\neq 0$):

$$
\begin{aligned}
\cos\alpha\cdot\sin\beta &= \sin\alpha\cdot\cos\beta \\
\cos\beta\cdot\sin\gamma &= \sin\beta\cdot\cos\gamma \\
\frac{\sin\gamma}{\cos\gamma} &= \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \\
\alpha+\beta+\gamma-\pi &= 0
\end{aligned}
$$

In der dritten Gleichung sehen wir, dass $\gamma = \alpha$, somit folgt aber, wenn wir dies in das ursprüngliche Gleichungssystem einsetzen:

$$
\begin{aligned}
\sin\alpha\cdot\cos\beta &= \sin\beta\cdot\cos\alpha \\
2\alpha+\beta-\pi &= 0
\end{aligned}
$$

Hier sehen wir in der ersten Zeile wiederum, dass die Gleichung nur für $\alpha = \beta$ erfüllt werden kann, somit folgt also:

$$\alpha = \beta = \gamma$$

und mit der Nebenbedingung:

$$\alpha = \frac{\pi}{3},$$

Somit ergibt sich als maximaler Wert

$$f(\alpha,\beta,\gamma) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

Dieser maximale Wert wird bei einem Dreieck mit gleichen Winkeln realisiert, dieses muss jedoch dann auch ein gleichseitiges Dreieck sein.