Heiko Dumlich, Max Hoffmann 21. November 2006

5 Übungsblatt Mathematik für Physiker III

5.1 Tangentengleichung

Wir haben die Gleichung
$$x^3 - 2y^2 = 25.$$
Wie man schnell sieht liegt der Punkt $(3,1)$ in der beschriebenen Kurve:
$$3^3 - 2\left(1\right)^2 = 27 - 2 = 25.$$

Im Punkt $(3,1)$ gilt
$$\frac{1}{2}\left(x^3 - 25\right) > 0$$
weshalb wir nach y auflösen können:
$$y\left(x\right) = \sqrt{\frac{1}{2}\left(x^3 - 25\right)}$$
und die Ableitung bilden:
$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{4}\frac{x^2}{\sqrt{\frac{1}{2}\left(x^3 - 25\right)}}.$$
An der Stelle $x = 3$ gilt
$$\frac{dy}{dx}|_{x=3} = \frac{27}{4}.$$
Daraus ergibt sich für eine Tangengleichung der Form $y = mx+n$ die Bedingung
$$\begin{aligned} 1 &= \frac{27}{4}\cdot 3 + n \\ \rightsquigarrow n &= \frac{-77}{4}. \end{aligned}$$
Und die Tangentengleichung:
$$t\left(x\right) = \frac{1}{4}\left(27x - 77\right).$$

5.2 Gleichungssytem impliziter Funktionen

a) Wir haben das Gleichungssystem:
$$\begin{array}{lll} \mathrm{I} & xe^{u+v} + 2uv - 1 & = 0 \\ \mathrm{II} & ye^{u-v} + 2uv - 2x & = 0 \end{array}$$

Damit u und v als Funktionen von x und y an der Stelle (1,2) definiert sind, muss

$$\det\left(\frac{\partial\left(F,G\right)}{\partial\left(v,u\right)}\right)=\begin{vmatrix}\partial_u F & \partial_v F\\ \partial_u G & \partial_v G\end{vmatrix}\neq 0$$

gelten, wobei I sei F und II sei G.

$$\begin{aligned}\partial_u F &= xe^{u+v}+2v\\ \partial_v F &= xe^{u+v}+2u\\ \partial_u G &= ye^{u-v}-\frac{1}{1+v}\\ \partial_v G &= -ye^{u-v}+\frac{u}{\left(1+v\right)^2}\end{aligned}$$

Aus Platzgründen setzen wir gleich $u=v=0$ ein.

$$\begin{aligned}\partial_u F\partial_v G-\partial_v F\partial_u G &= x\left(-y\right)-x\left(y-1\right)\\ &= -3.\end{aligned}$$

Da die Determinante nicht verschwindet existiert eine offene Menge die $(1,2)$ enthält, so dass $u=u\left(x,y\right)$ und $v=v\left(x,y\right)$ existieren.

b) Wir nutzen die oben berechnete Determinante:

$$\det\left(\frac{\partial\left(F,G\right)}{\partial\left(v,u\right)}\right)=\begin{vmatrix}\partial_u F & \partial_v F\\ \partial_u G & \partial_v G\end{vmatrix}=\det\begin{pmatrix}xe^{u+v}+2v & xe^{u+v}+2u\\ ye^{u-v}-\frac{1}{1+v} & -ye^{u-v}+\frac{u}{(1+v)^2}\end{pmatrix},$$

Die inverse von $\left(\frac{\partial(F,G)}{\partial(v,u)}\right)$ ist:

$$\left(\frac{\partial\left(F,G\right)}{\partial\left(v,u\right)}\right)^{-1}=\frac{1}{\det\left(\frac{\partial(F,G)}{\partial(v,u)}\right)}\begin{pmatrix}-ye^{u-v}+\frac{u}{(1+v)^2} & -xe^{u+v}-2u\\ -ye^{u-v}+\frac{1}{1+v} & xe^{u+v}+2v\end{pmatrix},$$

setzen wir hierbei wieder $u=v=0$ und $x=1$, $y=2$, folgt:

$$\left(\frac{\partial\left(F,G\right)}{\partial\left(v,u\right)}\right)^{-1}=\frac{1}{-3}\begin{pmatrix}-2 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

Nun gilt:

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{pmatrix}=-\left(\frac{\partial\left(F,G\right)}{\partial\left(v,u\right)}\right)^{-1}\begin{pmatrix}\frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y}\\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y}\end{pmatrix}.$$

Wir können dies lösen und erhalten:

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -\frac{1}{3}\\ -1 & \frac{1}{3}\end{pmatrix}.$$

Somit erhalten wir für $\frac{\partial u}{\partial x}=0$ und für $\frac{\partial v}{\partial x}=-1$.

5.3 Substitutionen

Wir haben implizite die Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$$

für welche bei $(1,1,1)$ die expliziten Funktionen:

$$\begin{aligned} z &= f(x,y) = \frac{3xy}{2} - \sqrt{\left(\frac{3xy}{2}\right)^2 - x^2 - y^2} \\ y &= g(x,z) = \frac{3xz}{2} - \sqrt{\left(\frac{3xz}{2}\right)^2 - x^2 - z^2} \end{aligned}$$

gleichbedeutend sind. Für den späteren Gebrauch bilden wir die partiellen Ableitungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{3y}{2} - \frac{x\left(\frac{3y}{2}\right)^2 - x}{\sqrt{\left(\frac{3xy}{2}\right)^2 - x^2 - y^2}} \\ \frac{\partial g}{\partial x} &= \frac{3z}{2} - \frac{z\left(\frac{3x}{2}\right)^2 - z}{\sqrt{\left(\frac{3xz}{2}\right)^2 - x^2 - z^2}} \end{aligned}$$

Außerdem ist

$$h(x,y,z) = xy^2z^3.$$

Jetzt können wir berechnen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}\left(h(x,y,f(x,y))\right) &= \frac{\partial h(x,y,f(x,y))}{\partial x} + \frac{\partial h(x,y,f(x,y))}{\partial f(x,y)}\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \\ &= y^2\left(\frac{3xy}{2} - \sqrt{\left(\frac{3xy}{2}\right)^2 - x^2 - y^2}\right)^3 \\ &\quad + xy^2 3\left(\frac{3xy}{2} - \sqrt{\left(\frac{3xy}{2}\right)^2 - x^2 - y^2}\right)^2\left(\frac{3y}{2} - \frac{x\left(\frac{3y}{2}\right)^2 - x}{\sqrt{\left(\frac{3xy}{2}\right)^2 - x^2 - y^2}}\right) \\ &= \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right)^3 + 3\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{3}{2} - \frac{5/4}{1/2}\right) \\ &= 1 - 3 = -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}\left(h(x,g(x,z),x)\right) &= \frac{\partial h(x,g(x,z),x)}{\partial x} + \frac{\partial h(x,g(x,z),x)}{\partial g(x,z)}\frac{\partial g(x,z)}{\partial x} \\ &= \left(\frac{3xz}{2} - \sqrt{\left(\frac{3xz}{2}\right)^2 - x^2 - z^2}\right)^2 z^3 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+x2\left(\frac{3xz}{2}-\sqrt{\left(\frac{3xz}{2}\right)^2-x^2-z^2}\right)\left(\frac{3z}{2}-\frac{z\left(\frac{3x}{2}\right)^2-z}{\sqrt{\left(\frac{3xz}{2}\right)^2-x^2-z^2}}\right)z^3 \\
= &\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\right)^2 1+2\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\right)1^3\left(\frac{3}{2}-\frac{5/4}{1/2}\right) \\
= &\; 1+2\left(-1\right)=-1
\end{aligned}
$$

Jetzt sind zwar die partiellen Ableitung, je nach Substitution eine andere, aber die Funktion $h\left(x,y,z\right)$ ist auch eine ganze andere, als die Substitutionsgleichung.

5.4 Lemniskate

Wir haben die implizite Gleichung:

$$
\left(x^2+y^2\right)^2=2\left(x^2-y^2\right) \tag{1}
$$

und suchen ein minimales begrenzendes Rechteck. An den Extremalstellen für y ist der Graph horizontal, oder $\partial_x y=0$. Daher fassen wir y als Funktion von x auf $\left(y=y\left(x\right)\right)$ und leiten die Gleichung x ab

$$
2\left(x^2+y^2\right)^2\left(2x+2yy'\right)=2\left(2x-2yy'\right)
$$

und setzen $y'=0$. Daraus folgt:

$$
\left(x^2+y^2\right)x=x.
$$

Lösungen für diese Gleichung sind

1. $x=0$
2. $y^2=1-x^2$.

Anhand der Skizze kann man sehen, dass nur die 2. Lösung in Frage kommt. Diese setzen wir in (1) ein.

$$
\left(x^2+1-x^2\right)=2\left(x^2-1+x^2\right)
$$

$$
\Leftrightarrow x^2=\frac{3}{4}
$$

Dies setzen wir wiederum in (1) ein.

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{3}{4}+y^2\right)^2 &= 2\left(\frac{3}{4}-y^2\right) \\
\frac{9}{16}+\frac{3}{2}y^2+y^4 &= \frac{3}{2}-2y^2
\end{aligned}
$$

Dies kann man umstellen und mit Hilfe der Substitution $u=y^2$ $(y=\pm\sqrt{u})$ in eine quadratische Gleichung verwandeln.

$$
u^2+\frac{7}{2}u-\frac{15}{16}=0
$$

$$\begin{aligned} u_{\pm} &= -\frac{7}{4} \pm \sqrt{\frac{49}{16} + \frac{15}{16}} \\ &= \frac{-7 \pm 8}{4} \end{aligned}$$

Das einzige relle Ergebnis ist

$$y = \pm\frac{1}{2}.$$

An den Extremalstellen für x ist der Graph vertikal, oder $\partial_y x = 0$. Daher fassen wir x als Funktion von y auf $(x = x(y))$ und leiten die Gleichung nach y ab.

$$2\left(x^2 + y^2\right)(2xx' + 2y) = 2(2xx' - 2y)$$

und setzen $x' = 0$. Daraus folgt:

$$2\left(x^2 + y^2\right) y = -y.$$

Diese Gleichung hat die Lösungen

1. $y = 0$
2. $2y^2 + 2x^2 + 1 = 0$, was aber keine Lösungen für x, y reell hat.

Daher setzen wir $y = 0$ in (1) ein und erhalten

$$\left(0 + x^2\right)^2 = 2\left(x^2 - 0\right)$$

Diese Gleichung hat die Lösungen

1. $x = 0$, was aber nicht relevant ist, wie man an der Skizze ablesen kann
2. $x = \pm\sqrt{2}$.

Daraus folgt als kleinstes Rechteck

$$\left\{(x, y) : x \in \left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right], y \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]\right\}.$$

Skizze siehe im Anhang (mathematica printout).