Heiko Dumlich, Max Hoffmann 14. November 2006

4 Mathematik für Physiker III

4.1 Jacobi-Matrix

Gegeben ist $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ $f(x,y)=xy+\frac{x}{y}$. Zu bestimmen ist $J_f(1,-1)$. Wir bestimmen die partiellen Ableitungen an der Stelle $(1,-1)$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} &= y+\frac{1}{y}\\ \frac{\partial f(1,-1)}{\partial x} &= -2\\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} &= x-\frac{x}{y^2}\\ \frac{\partial f(1,-1)}{\partial x} &= 0\end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$J_f(1,-1)=(-2,0).$$

4.2 Totale Differenzierbarkeit

Gegeben ist $f(x,y)=\sqrt[3]{x^3+y^3}$. Wir berechnen zunächst die partiellen Ableitungen im Ursprung in x- und y-Richtung um dann die totale Differenzierbarkeit im Ursprung zu überprüfen.

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-\overbrace{f(0,0)}^{=0}}{h}\\ &= \lim_{h\to0}\frac{\sqrt[3]{h^3+0}}{h}\\ &\lim_{h\to0}\frac{h}{h}=1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y} &= \lim_{h\to0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}\\ &= 1\end{aligned}$$

f total differenzierbar in $(0,0)$ ist gleichbedeutend mit $\exists\rho(x)\in O\left(\frac{1}{r}\right):\ f\left((0,0)+\vec{h}\right)=f(0,0)+J_f(0,0)\cdot\vec{h}+\left|\vec{h}\right|\rho\left(\vec{h}\right)$ in einer kleinen Umgebung von $(0,0)$. In die gegebene Gleichung können wir für den konkreten Fall einsetzen und nach ρ auflösen. Um die totale Differenzierbarkeit zu überprüfen, werden wir die kleine Verrückung $\vec{h}=(h_1,h_2)$ mit $h_1=h_2=h$ benutzen

$$\begin{aligned}
f\left((0,0)+\vec{h}\right) &= f(0,0)+(1,1)\cdot\vec{h}+\left|\vec{h}\right|\rho(\vec{r}) \\
\curvearrowright f(h_1,h_2) &= 0+(1,1)\cdot(h_1,h_2)+\sqrt{h_1^2+h_2^2}\rho\left(\vec{h}\right) \\
\curvearrowright &= h_1+h_2+\rho\left(\vec{h}\right) \\
\rightsquigarrow \rho\left(\vec{h}\right) &= \frac{\sqrt[3]{h_1^3+h_2^3}-h_1-h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \\
&= \frac{\sqrt[3]{2h^3}-2h}{\sqrt{2h^2}} = \frac{h}{h}\cdot\frac{\sqrt[3]{2}-2}{\sqrt{2}} \neq 0
\end{aligned}$$

4.3 Gradient eines Skalarfeldes

Gegeben ist

$$f(x,y,z) = x^3+y^3+z^3-3xyz.$$

Der Gradient lautet:

$$\vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} 3x^2-3yz \\ 3y^2-3xz \\ 3z^2-3xy \end{pmatrix}.$$

a) Die Punkte im Gradientenfeld, die senkrecht auf der z-Achse stehen erfüllen die Gleichung:

$$\vec{\nabla} f\cdot(0,0,\gamma) = 0,$$

wobei $\gamma\in\mathbb{R}$. Das bedeutet:

$$z^2 = xy$$

$$\rightsquigarrow \left\{(x,y,z):\ z^2=xy\right\}$$

Die Menge bildet zwei abgeplattete Kegel, die mit der Spitze den Ursprung berühren und sowohl die x- und y-Achse als auch die (1,1,1)-Achse umfasst.
b) Die Punkte, die im Gradientenfeld parallel zur z-Achse stehen erfüllen, da das Kreuzprodukt verschwinden muss:

$$\begin{aligned}
\text{I } 3x^2-3yz &= 0 \\
\text{II } 3y^2-3xy &= 0.
\end{aligned}$$

Umformen liefert:

$$\begin{aligned}
\text{I } x^2 &= yz \\
\text{II } y^2 &= xy \Leftrightarrow x=y
\end{aligned}$$

Einsetzen liefert:

$$\begin{aligned} \text{I } x^2 &= xz \Leftrightarrow x = z \\ \text{II } y^2 &= yz \Leftrightarrow y = z \end{aligned}$$

Dies gilt jedoch nur für den Fall $x \neq 0$ und $y \neq 0$. Somit folgt $x = y = z$.

$$\rightsquigarrow \{(x, y, z) : x = y = z\}.$$

Die Punkte bilden also die Ursprungsgerade in $(1, 1, 1)$-Richtung (dies ist wie beim Nullvektor, da der Nullvektor jedoch auf jedem Vektor senkrecht steht und zu jedem Vektor parallel ist, gilt dies).

Für den Fall, dass $x = 0, y = 0$ folgt automatisch $x = y = z = 0$:

$$\rightsquigarrow \{(x, y, z) : x = y = z = 0\}.$$

Hierbei befinden wir uns im Punkt $(0, 0, 0)$.

c) Die Punkte, die im Gradientenfeld zum Nullvektor werden erfüllen:

$$\vec{\nabla} f = \vec{0} = \begin{pmatrix} 3x^2 - 3yz \\ 3y^2 - 3xz \\ 3z^2 - 3xy \end{pmatrix}$$

Durch Umstellen erhält man die 3 Gleichungen:

$$\begin{aligned} x &= \frac{yz}{x} = \frac{y^2}{z} = \frac{z^2}{y} \\ y &= \frac{xz}{y} = \frac{y^2}{x} = \frac{x^2}{z} \\ z &= \frac{xy}{z} = \frac{y^2}{x} = \frac{x^2}{y} \end{aligned}$$

Was wiederum auf

$$x = y = z$$

$$\rightsquigarrow \{(x, y, z) : x = y = z\}$$

führt. Die Punkte bilden also die Ursprungsgerade in $(1, 1, 1)$-Richtung.

4.4 Gradientenfeld und Beschränkheit

Gegeben ist

$$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

auf ganz $\mathbb{R}^3$ definiert und in C^1 und $f(x, y, z) = \vec{\nabla} g(x, y, z)$ mit

$$||f(x, y, z)|| \leq \frac{C}{r^{1+\varepsilon}} \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \ \varepsilon > 0.$$

Es ist zu zeigen, dass g beschränkt ist.

Es gilt für $r > 1$:

$$g(x,y,z) = g\left(\frac{x}{r},\frac{y}{r},\frac{z}{r}\right) + \int_1^r \frac{d}{dt} g\left(t\frac{x}{r},t\frac{y}{r},t\frac{z}{r}\right)\,dt$$

wobei

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} g\left(t\frac{x}{r},t\frac{y}{r},t\frac{z}{r}\right) &= \left(\frac{dg}{dx}\frac{x}{r},\frac{dg}{dy}\frac{y}{r},\frac{dg}{dz}\frac{z}{r}\right)\\
&= \left(\frac{dg}{dx}\cdot\frac{dx}{dt},\frac{dg}{dy}\cdot\frac{dy}{dt},\frac{dg}{dz}\cdot\frac{dz}{dt}\right)\\
&= \left(\frac{dg}{dx},\frac{dg}{dy},\frac{dg}{dz}\right)\cdot\underbrace{\left(\frac{x}{r},\frac{y}{r},\frac{z}{r}\right)}_{-\vec{\nabla}|\vec{r}|}\\
&= -\left(\vec{\nabla}g\right)\cdot\left(\vec{\nabla}r\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rightsquigarrow g(x,y,z) &= \underbrace{g\left(\frac{x}{r},\frac{y}{r},\frac{z}{r}\right)}_{\leq A} - [r-1]\underbrace{\left(\vec{\nabla}g\right)\cdot\left(\vec{\nabla}r\right)}_{\text{Cauchy-Schwarz}}\\
&\leq A - r\underbrace{\left|\left|\vec{\nabla}g\right|\right|}_{\leq\frac{C}{r^{1+\varepsilon}}}\underbrace{\left|\left|\vec{\nabla}r\right|\right|}_{\leq 3}\\
&\leq A3r^{-\varepsilon}.
\end{aligned}$$

Das heißt, die Funktion ist beschränkt.