Heiko Dumlich, Max Hoffmann 7. November 2006

3 Übungsblatt Mathematik für Physiker III

3.1 Astroide

Parametrisierung $\bar{\gamma}(t) = \left(a\,\cos^3 t, a\,\sin^3 t\right)$.

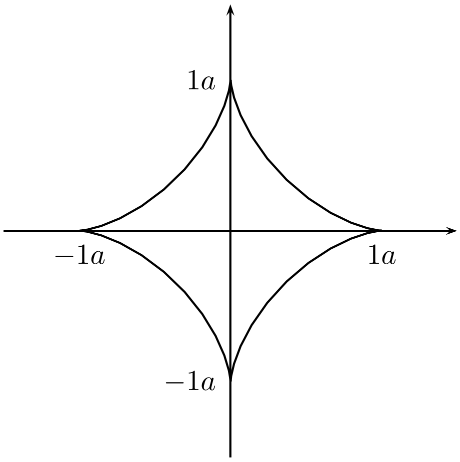

Abbildung 1: Eine Astroide

Für eine Umrundung gibt die Grenzkurve den Umfang der Astroide an. Für die Länge der Kurve bei einer Umrundung, wobei wir auf Grund der Symmetrie nur den ersten Quadranten betrachten und danach mit 4 multiplizieren können, folgt:

$$
\begin{aligned}
L(\bar{\gamma}(t)) &= \int_{\bar{\gamma}} 1\,ds = 4 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\left(\frac{d}{dt} a\,\cos^3 t\right)^2 + \left(\frac{d}{dt} a\,\sin^3 t\right)^2}\,dt, \\
&= 4 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\left(-3a\,\cos^2 t\,\sin t\right)^2 + \left(3a\,\sin^2 t\,\cos t\right)^2}\,dt, \\
&= 4 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3a\,\cos t\,\sin t\,\underbrace{\sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t}}_{=1}\,dt, \\
&= 4 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) a\,\cos^2 t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 4 \cdot \frac{3}{2} a, \\
&= 6a.
\end{aligned}
$$

Somit folgt für den Umfang der Astroide $U = 6a$.

3.2 logarithmische Spirale

Parametrisierung: $\bar{\gamma}(t) = \left(e^{ct}\cos t, e^{ct}\sin t\right)$.

(a)

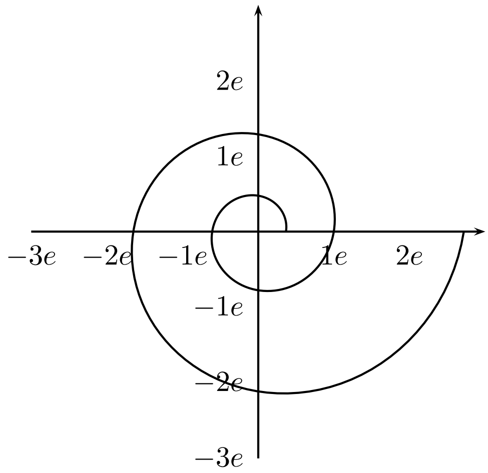

Abbildung 2: Die logarithmische Spirale

(b)

Für die Länge der Kurve gilt:

$$\begin{aligned}
L(\bar{\gamma}) &= \int_a^b \sqrt{\left(\frac{d}{dt}e^{ct}\cos t\right)^2 + \left(\frac{d}{dt}e^{ct}\sin t\right)^2} dt, \\
&= \int_a^b \sqrt{(c\,e^{ct}\cos t - e^{ct}\sin t)^2 + (c\,e^{ct}\sin t + e^{ct}\cos t)^2} dt, \\
&= \int_a^b \sqrt{c^2\,e^{2ct}\cos^2 t - 2c\,e^{2ct}\cos t\sin t + e^{2ct}\sin^2 t + c^2\,e^{2ct}\sin^2 t + 2c\,e^{2ct}\cos t\sin t + e^{2ct}\cos^2 t} dt, \\
&= \int_a^b e^{ct}\sqrt{(c^2+1)} dt, \\
&= \frac{\sqrt{(c^2+1)}}{c} e^{ct}\Big|_a^b, \\
&= \sqrt{1+\frac{1}{c^2}}\left(e^{cb} - e^{ca}\right).
\end{aligned}$$

Bei dem Fall: $a \to -\infty$, verschwindet die zweite Exponentialfunktion und es bleibt:

$$L(\bar{\gamma}(t)) = \sqrt{1+\frac{1}{c^2}}\,e^{cb}.$$

(c)

Damit sich die beiden Kurven schneiden, müssen an dem Schnittpunkt die Normen, also der Abstand vom Ursprung, gleich sein. Aufgrund der Bijektivität, das heißt Monotonie und Surjektivität der Exponentialfunktion ist das höchstens und mindestens einmal gegeben. Aufgrund der Winkelinvarianz der Kreiskurve, muss auschließlich die Norm betrachtet werden.

Um den Schnittwinkel α der zwei Kurven $\bar{\gamma}$ und $\bar{\gamma}_k$ zu bestimmen benutzt man die Formel:

$$\cos(\alpha) = \frac{\langle \dot{\bar{\gamma}}, \dot{\bar{\gamma}}_k \rangle}{||\dot{\bar{\gamma}}|| \, ||\dot{\bar{\gamma}}_k||}$$

$$\bar{\gamma}(t) \doteq \begin{pmatrix} r\cos(t) \\ r\sin(t) \end{pmatrix}$$

$$\dot{\bar{\gamma}}(t) \doteq \begin{pmatrix} -r\sin(t) \\ r\cos(t) \end{pmatrix}$$

$$\bar{\gamma}_k(t) \doteq \begin{pmatrix} e^{ct}\cos(t) \\ e^{ct}\sin(t) \end{pmatrix}$$

$$\dot{\bar{\gamma}}_k(t) \doteq \begin{pmatrix} ce^{ct}\cos(t) - e^{ct}\sin(t) \\ ce^{ct}\sin(t) + e^{ct}\cos(t) \end{pmatrix}$$

Daraus kann man die Normen berechnen:

$$||\dot{\bar{\gamma}}(t)|| = \sqrt{r^2\sin^2(t) + r^2\cos^2(t)} = r$$

$$\begin{aligned} ||\dot{\bar{\gamma}}_k(t)||^2 &= \left(ce^{ct}\cos(t) - e^{ct}\sin(t)\right)^2 + \left(ce^{ct}\cos(t) - e^{ct}\sin(t)\right)^2 \\ &= e^{2ct}\left(1 + c^2\right) \end{aligned}$$

...und das Skalarprodukt ...

$$\begin{aligned} \langle \dot{\bar{\gamma}}, \dot{\bar{\gamma}}_k \rangle &\doteq \left\langle \begin{pmatrix} ce^{ct}\cos(t) - e^{ct}\sin(t) \\ ce^{ct}\sin(t) + e^{ct}\cos(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -r\sin(t) \\ r\cos(t) \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= -rce^{ct}\sin(t)\cos(t) + re^{ct}\sin^2(t) + rce^{ct}\sin(t)\cos(t) + re^{ct}\cos^2(t) \\ &= re^{ct}. \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha) &= \frac{re^{ct}}{r\sqrt{e^{2ct}(1+c^2)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{c^2+1}}. \end{aligned}$$

Interessanterweise ist der Schnittwinkel also unabhängig vom Kreisradius.

3.3 Massepunkt im Kraftfeld

Vektorfeld:

$$\vec{f}\,(x,y,z) := \begin{pmatrix} -cx \\ -cy \\ -cz \end{pmatrix},$$

Bewegung durch diese Kraftfeld von $\bar{a} = (1,0,0)$ nach $\bar{b} = (1,0,1)$.

(a)

Für die Strecke wählen wir die Parametrisierung $\bar{\gamma}_1 = (0,0,t)$ mit dem Intervall $t \in [0,1]$:

$$\int_{\bar{\gamma}} \left\langle \vec{f}\,(\vec{x})\,, d\vec{x} \right\rangle = \int_0^1 \left\langle \vec{f}\,(\bar{\gamma}\,(t))\,, \dot{\bar{\gamma}}\,(t) \right\rangle dt = \int_{\bar{\gamma}} (-c\,z\,dz) = -c \int_0^1 \sqrt{\left(t\frac{d}{dt}t\right)^2}\,dt = -c\int_0^1 t\,dt = -\frac{c}{2}.$$

(b)

Für die Schraubenlinie wählen wir die Parametrisierung $\bar{\gamma}_2 = (r\,\cos t, r\,\sin t, \frac{t}{2\pi})$ mit dem Intervall $t \in [0, 2\pi]$:

$$\begin{aligned}
\int_{\bar{\gamma}} \left\langle \vec{f}\,(\vec{x})\,, d\vec{x} \right\rangle &= \int_0^{2\pi} \left\langle \vec{f}\,(\bar{\gamma}\,(t))\,, \dot{\bar{\gamma}}\,(t) \right\rangle dt = \int_{\bar{\gamma}} (-c)\,(x\,dx + y\,dy + z\,dz) \\
&= -c\int_0^{2\pi} \left(-r^2\,\cos t\,\sin t + r^2\,\sin t\,\cos t + \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 t \right) dt = -c\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_0^{2\pi} t\,dt \\
&= -c\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{2} t^2|_0^{2\pi} = -2c\pi^2\frac{1}{4\pi^2} = -\frac{c}{2}.
\end{aligned}$$

Die Bewegungen verbrauchen beide gleich viel Energie, da das Kraftfeld konservativ ist.

3.4 2D-Vektorfeld

Vektorfeld:

$$\vec{f}\,(x,y) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}.$$

Es gilt klassisch $\int_{\bar{\gamma}} -y\,dx + x\,dy$.

(a)

Die Kurve $\bar{\gamma}_a$ kann man folgendermaßen parametrisieren:

$$\bar{\gamma}_a\left(t\right) = \left(1-t\right)\left(a,b\right) + t\left(c,d\right) \qquad t \in [0,1]$$

$$\dot{\bar{\gamma}}_a\left(t\right) = \left(c-a, d-b\right).$$

Daraus folgt

$$\int_0^1 dt\ \left(bt - b - td\right)\left(c-a\right) + \left(a - at + ct\right)\left(d-b\right)$$

$$= \int_0^1 dt\ ab - bc + ad - ab + t\left(bc - ab - cd + ad - ad + ad + cd - bc\right)$$

$$= ad - bc$$

(b)

Die Kurve $\bar{\gamma}_b$ kann man folgendermaßen parametrisieren:

$$\bar{\gamma}_{b1}\left(t\right) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} \qquad t \in [0,1]$$

$$\dot{\bar{\gamma}}_{b1}\left(t\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{\gamma}_{b2}\left(t\right) = \begin{pmatrix} \cos\left(t\right) \\ \sin\left(t\right) \end{pmatrix} \qquad t \in [0,\varphi]$$

$$\dot{\bar{\gamma}}_{b2}\left(t\right) = \begin{pmatrix} -\sin\left(t\right) \\ \cos\left(t\right) \end{pmatrix}$$

$$\bar{\gamma}_{b3}\left(t\right) = \left(1-t\right)\begin{pmatrix} \cos\left(\varphi\right) \\ \sin\left(\varphi\right) \end{pmatrix} \qquad t \in [0,1]$$

$$\dot{\bar{\gamma}}_{b3}\left(t\right) = \begin{pmatrix} -\cos\left(\varphi\right) \\ -\sin\left(\varphi\right) \end{pmatrix}.$$

Daraus ergeben sich die folgenden 3 bestimmen Integrale, in die man die Gesamtkurve zerlegen kann:

$$I_1 = \int_0^1 \left(-0\right)\cdot 1 + t \cdot 0\ dt = 0$$

$$I_2 = \int_0^{\varphi} -\sin\left(t\right)\left(-\sin\left(t\right)\right) + \cos\left(t\right)\cos\left(t\right)\ dt = \varphi$$

$$I_3 = \int_0^1 -\left(1-t\right)\sin\left(\varphi\right)\left(-\cos\left(\varphi\right)\right) + \left(1-t\right)\cos\left(\varphi\right)\left(-\sin\left(\varphi\right)\right)\ dt = 0$$

$$\Rightarrow I_1 + I_2 + I_3 = \varphi$$

(c)

Man zerteile das Kurvenintegral wieder in 3 Teile:

$$\begin{aligned}
\bar{\gamma}_1(t) &= (t,0) \qquad t\in[0,1]\\
\dot{\bar{\gamma}}_1 &= (1,0)\\
\bar{\gamma}_2 &= (\cosh(t),\sinh(t)) \qquad t\in[0,u]\ \ u=const.>0\\
\dot{\bar{\gamma}}_2 &= (\sinh(t),\cosh(t))\\
\bar{\gamma}_3 &= (1-t)(\cosh(u),\sinh(u)) \qquad t\in[0,1]\\
\dot{\bar{\gamma}}_3 &= -(\cosh(u),\sinh(u))
\end{aligned}$$

und berechne die entsprechenden Integral

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^1 dt\ \underbrace{f_1}_{0}(\bar{\gamma}_1)\,\dot{\bar{\gamma}}_1 + f_2(\bar{\gamma}_2)\underbrace{\dot{\bar{\gamma}}_2}_{0} = \int_0^1 dt\ \ -0\cdot 1 + t\cdot 0 = 0\\
I_2 &= \int_0^u dt\ \ (-\sinh(t))\sinh(t) + \cosh(t)\cosh(t) = \int_0^u dt = u\\
I_3 &= \int_0^1 -(1-t)(\sinh(u))(-\cosh(u)) + (1-t)(\cosh(u))(-\sinh(u))\\
&= \int_0^1 0\ dt = 0.
\end{aligned}$$

Daher lautet das Integral um das gesamte 'Dreieck' herum:

$$I_1+I_2+I_3=u.$$

Der Integrationsweg wird durch folgende Skizze ersichtlich:

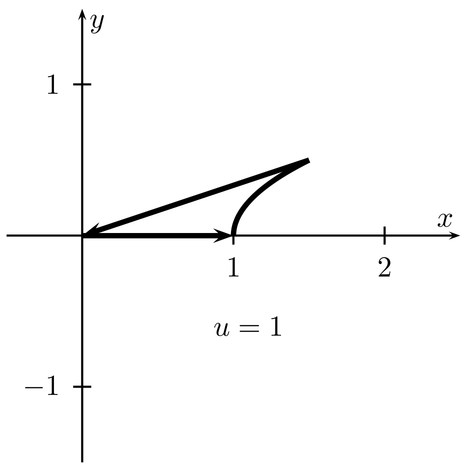

Abbildung 3: Das Dreieck