Heiko Dumlich, Max Hoffmann 31. Oktober 2006

2 Übungsblatt Mathematik für Physiker III

2.1 Stetigkeit und Abgeschlossenheit

Gegeben: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, **betrachte** $G = \{(x, y) : f(x) = y\} \in \mathbb{R}^2$.

a)

z.z.: f stetig $\Rightarrow$ G abgeschlossen

Angenommen, mit $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ist gemeint, dass f für jedes $x \in \mathbb{R}$ definiert ist:

Das bedeutet, dass für alle $a \in \mathbb{R}$ und für alle gegen a konvergierende Folgen (x_n) gilt

$$\lim_{n \to \infty} (x_n, f(x_n)) = (a, f(a)).$$

Das ist aber gerade die Definition einer abgeschlossenen Menge

b)

z.z.: G abgeschlossen $\Rightarrow$ f stetig

Gegenbeispiel:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Die Funktion ist abgeschlossen, an der Stelle 0, genau, wie in jedem anderen Punkt. Allerdings nicht stetig.

2.2 Ableitung von Determinanten

Die Funktion φ berechnet sich wie folgt:

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \det\left(\vec{f}, \vec{g}, \vec{h}\right) = \begin{vmatrix} f_1 & g_1 & h_1 \\ f_2 & g_2 & h_2 \\ f_3 & g_3 & h_3 \end{vmatrix} \\ &= f_1 g_2 h_3 + g_1 h_2 f_3 + h_1 f_2 g_3 - h_1 g_2 f_3 - g_1 f_2 h_3 - f_1 h_2 g_3 \\ &= \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} f_\alpha g_\beta h_\gamma. \end{aligned}$$

Die Ableitung nach der Zeit berechnet sich daher kanonisch, indem man jeden Term mit Produktregel ableitet:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varphi}{\partial t} &= \frac{\partial f_1}{\partial t} g_2 h_3 + f_1 \frac{\partial g_2}{\partial t} h_3 + f_1 g_2 \frac{\partial h_3}{\partial t} \\
&\quad + \frac{\partial g_1}{\partial t} h_2 f_3 + g_1 \frac{\partial h_2}{\partial t} f_3 + g_1 h_2 \frac{\partial f_3}{\partial t} + \dots \\
&\quad - \frac{\partial f_1}{\partial t} h_2 g_3 - f_1 \frac{\partial h_2}{\partial t} g_3 - f_1 h_2 \frac{\partial g_3}{\partial t} \\
&= \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial}{\partial t} f_\alpha (t)\, g_\beta (t)\, h_\gamma (t) \\
&= \det\left(\frac{\partial}{\partial t}\vec{f}, \vec{g}, \vec{h}\right) + \det\left(\vec{f}, \frac{\partial}{\partial t}\vec{g}, \vec{h}\right) + \det\left(\vec{f}, \vec{g}, \frac{\partial}{\partial t}\vec{h}\right)
\end{aligned}$$

Es scheint sinnvoll, diese Formel allgemein auf quadratische Matrizen $M(n \times n, \mathbb{R})$ mit $M = (m_1, m_2, \dots, m_n)$ zu übertragen, so dass gilt:

$$\frac{\partial \varphi_M (t)}{\partial t} = \det(\dot{m}_1, m_2, \dots, m_n) + \det(m_1, \dot{m}_2, \dots, m_n) + \dots + \det(\dot{m}_1, m_2, \dots, \dot{m}_n)$$

2.3 Abrundung von Ecken

Es gilt:

$$\bar{\gamma}(t) = \begin{cases} (-t, 0) & t \leq -1, \\ (\dots, \dots) & -1 < t < 1, \\ (t, t) & t \geq 1, \end{cases}$$

wobei $\bar{\gamma}(t) \in K_{(0,0)}(2)$ für $-1 < t < 1$ noch zu bestimmen ist. Es folgt mit den Randbedingungen:

$$\begin{aligned}
\bar{\gamma}_1'(1) &= 1, \\
\bar{\gamma}_1'(-1) &= -1, \\
\bar{\gamma}_1(1) &= 1, \\
\bar{\gamma}_1(-1) &= 1,
\end{aligned}$$

und dem Ansatz eines Polynoms 3ten Grades $\left(at^3 + bt^2 + ct + d\right)$ für die erste Komponente $\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}$, wie bereits im Tutorium bestimmt. Für die zweite Komponente gelten die folgenden Randbedingungen:

$$\begin{aligned}
\bar{\gamma}_2'(1) &= 1, \\
\bar{\gamma}_2'(-1) &= 0, \\
\bar{\gamma}_2(1) &= 1, \\
\bar{\gamma}_2(-1) &= 0,
\end{aligned}$$

wobei wieder der Ansatz von einem Polynom 3ten Grades ausgeht. Es folgt dann das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 3a + 2b + c &= 1, \\ 3a - 2b + c &= 0, \\ a + b + c + d &= 1, \\ -a + b - c + d &= 0, \end{aligned}$$

aus diesem können wir dann die Koeffizienten bestimmen.

$$\begin{aligned} 3a + 2b + c &= 1, \\ 4b &= 1, \\ 2b + 2d &= 1, \\ -a + b - c + d &= 0, \end{aligned}$$

hieraus folgen $b = \frac{1}{4}$ und $d = \frac{1}{4}$,

$$\begin{aligned} 3a + c &= \frac{1}{2}, \\ b &= \frac{1}{4}, \\ a + c &= \frac{1}{2}, \\ d &= \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

an dieser Stelle sieht man, dass $a = 0$ sein muss, da sonst das Gleichungssystem nicht lösbar wäre. Somit folgt für $c = \frac{1}{2}$. Der Ansatz liefert das Polynom 2ten Grades $\frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}$, somit folgt also für die gesamte Kurve:

$$\bar{\gamma}(t) = \begin{cases} (-t, 0) & t \leq -1, \\ \left(\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}\,,\, \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\right) & -1 < t < 1, \\ (t, t) & t \geq 1, \end{cases}$$

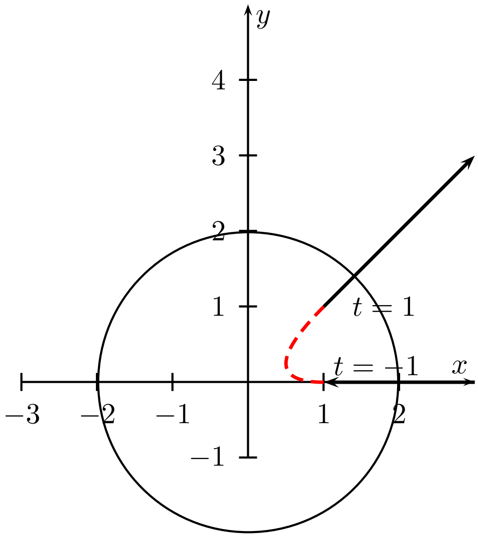
Nun zeigen wir noch, dass $\bar{\gamma}(t) \in K_{(0,0)}(2)$ für $-1 < t < 1$ gilt:

$$\begin{aligned} |\bar{\gamma}(t)|^2 &= \frac{1}{4}\left(t^2 + 1\right)^2 + \frac{1}{16}(t+1)^4, \\ &= \frac{4}{16}\left(t^4 + 2t + 1\right) + \frac{1}{16}\left(t^4 + 4t^3 + 6t^2 + 4t + 1\right), \\ &= \frac{4}{16}t^4 + \frac{8}{16}t + \frac{4}{16} + \frac{1}{16}t^4 + \frac{4}{16}t^3 + \frac{6}{16}t^2 + \frac{4}{16}t + \frac{1}{16}, \\ &= \frac{1}{16}\left(5t^4 + 4t^3 + 6t^2 + 12t + 5\right), \end{aligned}$$

wobei wir nun die Wurzel ziehen können und mit der Annahme, dass $|t| \leq 1$ gilt $(t \to 1)$, folgt:

$$\bar{\gamma}(t) \leq \sqrt{\frac{32}{16}} = \sqrt{2},$$

somit befindet sich die Kurve also im Kreis mit dem Radius 2 um den Ursprung, wie man auch gut auf folgender Skizze erkennen kann.



2.4 Zylinder

Der Einfachheit halber, nehmen wir an, die sich ergebende Schnittkurve $\bar{\gamma}$ läge in einer Ebene. Später werden wir durch Einsetzen überprüfen, ob diese Annahme auch richtig war.

Die Schnittkurve, muss in dem Zylinder enthalten sein, kann also auf jeden Fall in der $x-y$-Ebene durch Polarkoordinaten als ein Kreis um den Punkt $(1, 0)$ beschrieben werden. Das heißt $\gamma_x(t) = 1 + \cos t$ und $\gamma_y(t) = \sin t$, wobei $t \in [0, 2\pi]$. Aus der Bedingung für den Zylinder

$$(x-1)^2 + y^2 = 1$$

folgt

$$y^2 = 1 - (x-1)^2 = 2x - x^2.$$

Setzt man dies in die Bedingung $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ für die Kugel ein, erhält man:

$$z^2 = 4 - 2x = 4 - 2(1 + \cos t) = 2 - 2\cos t,$$

und weil $z \geq 0$, wie man an der Skizze leicht sehen kann, kann man sogar sagen:

$$z = \sqrt{2 - 2\cos t}.$$

Daher die Behauptung: $\bar{\gamma}(t) = \left(1 + \cos t, \sin t, \sqrt{2 - 2\cos t}\right)$. Bleibt noch zu überprüfen, dass $\bar{\gamma} \in Z$ und $\bar{\gamma} \in S_+$

$\bar{\gamma} \in Z$ sieht man sofort, da wir γ_x und γ_y nicht verändert haben und Z keine Bedingung an z stellt.

$\bar{\gamma} \in S_+$ kann man schnell nachrechnen:

$$\begin{aligned}
||\bar{\gamma}||^2 &= \gamma_x^2 + \gamma_y^2 + \gamma_z^2 \\
&= (1 + \cos t)^2 + \sin^2 t + 2 - 2\cos t \\
&= 1 + 2\cos t + \underbrace{\cos^2 t + \sin^2 t}_{1} + 2 - 2\cos t \\
&= 4
\end{aligned}$$

Im Anhang ist ein Plot der Parametrisierung zu finden.