Heiko Dumlich, Max Hoffmann 7. Februar 2007

13 Übungsblatt Mathematik für Physiker III

13.1 Quellenfreiheit bei $\vec{f} \times \vec{r}$

Es ist zu zeigen, dass mit einem wirbelfreien Vektorfeld $\vec{f}$, d.h. $\vec{\text{rot}}\vec{f} = 0$, der Term $\vec{f} \times \vec{r}$ quellenfrei ist, d.h. $\text{div}\left(\vec{f} \times \vec{r}\right) = 0$. Wir können die in Aufgabe 13.6 hergeleitete Formel benutzen:

$$\text{div}\left(\vec{f} \times \vec{r}\right) = \left\langle \vec{\text{rot}}\vec{f}, \vec{r} \right\rangle - \left\langle \vec{f}, \vec{\text{rot}}\vec{r} \right\rangle,$$

der erste Term verschwindet wegen $\vec{\text{rot}}\vec{f} = 0$, aus der Vorraussetzung. Im zweiten Term verschwindet $\vec{\text{rot}}\vec{r}$, dies lässt sich schnell zeigen:

$$\left(\vec{\text{rot}}\vec{r}\right)_i = (\nabla \times \vec{r})_i = \epsilon_{ijk}\partial_j r_k = \epsilon_{ijk}\delta_{jk} = \epsilon_{ijj} = 0.$$

Damit verschwindet der zweite Term also auch und wir erhalten:

$$\text{div}\left(\vec{f} \times \vec{r}\right) = 0.$$

$\square$

13.2 $\vec{\text{rot}}\left(\vec{f} \times \vec{a}\right) = \vec{\text{grad}}\left\langle \vec{f}, \vec{a} \right\rangle$

Es sei $\vec{f}$ quellen- und wirbelfrei, d.h. $\vec{\text{rot}}\vec{f} = 0$ und $\text{div}\vec{f} = 0$ und $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ein fester Vektor. Es ist nachzuweisen, dass die Relation:

$$\vec{\text{rot}}\left(\vec{f} \times \vec{a}\right) = \vec{\text{grad}}\left\langle \vec{f}, \vec{a} \right\rangle$$

für die gegebenen Vorraussetzungen gültig ist.

Weil $\vec{f}$ wirbelfrei ist, gilt

$$\begin{aligned} \partial_y f_z &= \partial_z f_y \\ \partial_z f_x &= \partial_x f_z \\ \partial_x f_y &= \partial_y f_x. \end{aligned}$$

Nun rechnen wir aus:

$$\begin{aligned} \vec{\text{rot}}\left(\vec{f} \times \vec{a}\right) &= \vec{\text{rot}}\begin{pmatrix} f_y a_z - f_z a_y \\ f_z a_x - f_x a_z \\ f_x a_y - f_y a_x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \partial_x\left(f_x a_y - f_y a_x\right) - \partial_z\left(f_z a_x - f_x a_z\right) \\ \partial_y\left(f_y a_z - f_z a_y\right) - \partial_x\left(f_x a_y - f_y a_x\right) \\ \partial_z\left(f_z a_x - f_x a_z\right) - \partial_y\left(f_y a_z - f_z a_y\right) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \partial_x f_x a_y + \partial_z f_x a_z \\ \partial_y f_y a_z + \partial_x f_y a_x \\ \partial_z f_z a_x + \partial_y f_z a_y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Der letzte Schritt gilt, weil die Divergenz von $\vec{f}$ auch verschwindet.

Von der anderen Richtung rechnen wir:

$$\begin{aligned}
\vec{\text{grad}}\left\langle \vec{f}, \vec{a} \right\rangle &= \vec{\text{grad}}\left(f_x a_x + f_y a_y + f_z a_z\right) \\
&= \begin{pmatrix} \partial_x \left(f_x a_x + f_y a_y + f_z a_z\right) \\ \partial_y \left(f_x a_x + f_y a_y + f_z a_z\right) \\ \partial_z \left(f_x a_x + f_y a_y + f_z a_z\right) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \partial_x \left(f_y a_y + f_z a_z\right) \\ \partial_y \left(f_x a_x + f_z a_z\right) \\ \partial_z \left(f_x a_x + f_y a_y\right) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Wendet man nun die Formeln an, die aus der Wirbelfreiheit folgten, sieht man, dass die beiden Terme identisch sind.

13.3 Vektorfeld im ersten Oktanten

Wir betrachten das Vektorfeld im ersten Oktanten $(x, y, z > 0)$:

$$\vec{f}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2\left(y+z\right)^{-\frac{1}{2}} \\ -x \cdot \left(y+z\right)^{-\frac{3}{2}} \\ -x \cdot \left(y+z\right)^{-\frac{3}{2}} \end{pmatrix}$$

für welches gezeigt werden soll, dass es ein Potentialfeld ist. Für Potentialfelder gilt:

$$\vec{f} = -\vec{\text{grad}} p$$

Wir können leicht ein solches p finden, wobei wir die Komponenten integrieren können:

$$-\int dx\, f_x = -\int dx\, 2\left(y+z\right)^{-\frac{1}{2}} = -2x\left(y+z\right)^{-\frac{1}{2}} - C = p.$$

Dieses p gilt auch für die anderen Komponenten, wie man leicht durch bilden des Gradienten sieht:

$$-\vec{\text{grad}} p = -\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}\left[-2x\left(y+z\right)^{-\frac{1}{2}} - C\right] \\ \frac{\partial}{\partial y}\left[-2x\left(y+z\right)^{-\frac{1}{2}} - C\right] \\ \frac{\partial}{\partial z}\left[-2x\left(y+z\right)^{-\frac{1}{2}} - C\right] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\left(y+z\right)^{-\frac{1}{2}} \\ -x\left(y+z\right)^{-\frac{3}{2}} \\ -x\left(y+z\right)^{-\frac{3}{2}} \end{pmatrix}$$

Somit ist also $\vec{f}$ ein Potentialfeld.

Zu bestimmen ist das Arbeitsintegral vom Punkt $(1, 1, 3)$ zum Punkt $(2, 4, 5)$. Weil es sich bei dem Vektorfeld um ein Potentialfeld handelt, kann eine beliebige Kurve mit diesen Enpunkten gewählt werden.

Wir wollen das Arbeitsintegral entlang der folgenden Kurve

$$\bar{\gamma}(t) : [0, 1] \to \mathbb{R}^3$$

$$\begin{aligned}\bar{\gamma}(t) &= (1-t)\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\4\\5\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}t+1\\3t+1\\2t+3\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\dot{\bar{\gamma}}(t) = \partial_t\bar{\gamma}(t) = \begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$$

ausrechnen.

Diese Parametrisierung setzen wir ein:

$$\begin{aligned}\int_{\bar{\gamma}}\left\langle\vec{f},d\vec{x}\right\rangle &= \int_0^1 dt\left\langle\vec{f}\left(\bar{\gamma}(t)\right),\dot{\bar{\gamma}}(t)\right\rangle\\ &= \int_0^1 dt\begin{pmatrix}2(5t+4)^{-1/2}\\-(t+1)(5t+4)^{-3/2}\\-(t+1)(5t+4)^{-3/2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}\\ &= \int_0^1 dt\frac{2}{(5t+4)^{1/2}}-\frac{5(t+1)}{(5t+4)^{3/2}}\\ &= \int_0^1 dt\frac{2(5t+4)-5(t+1)}{(5t+4)^{3/2}}\\ &= \int_0^1 dt\frac{5t}{(5t+4)^{3/2}}+\frac{3}{(5t+4)^{3/2}}\end{aligned}$$

Um den ersten Terme zu integrieren, bestimmen wir die Stammfunktion von

$$\frac{5t}{(5t\alpha+4)^{3/2}} = -2\partial_\alpha(5t\alpha+4)^{-1/2}$$

$$\int dt-2\partial_\alpha(5t+4)^{-1/2} = -2\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{2(5t+4)^{1/2}}{5\alpha}\right)+c$$

und setzen hinterher $\alpha=1$. Die andere Stammfunktion lautet:

$$\int dt\frac{3}{(5t+4)^{3/2}} = -\frac{6}{5}(5t+4)^{-1/2}+c$$

wobei jetzt nur die Potenzregel gebraucht wurde.

$$\int_0^1 dt\frac{5t}{(5t+4)^{3/2}}+\frac{3}{(5t+4)^{3/2}} = \left[-2\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{2(5t+4)^{1/2}}{5\alpha}\right)-\frac{6}{5}(5t+4)^{-1/2}\right]_{t=0}^1$$

$$
\begin{aligned}
&= \left[-\frac{4}{5}\cdot\frac{\frac{\alpha}{2}(5t+4)^{-1/2}-(5t+4)^{1/2}}{\alpha^2}-\frac{6}{5}(5t+4)^{-1/2}\right]_{t=0}^{1} \\
(\alpha=1) &= \left[\frac{16+10t}{5\sqrt{5t+4}}-\frac{6}{5\sqrt{5t+4}}\right]_{t=0}^{1} = \left[\frac{10\,(t+1)}{5\sqrt{5t+4}}\right]_{t=0}^{1} \\
&= \frac{20}{5\cdot 3}-\frac{10}{5\cdot 2}=\frac{20-15}{15}=\frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

Da wir jedoch bereits oben das Potential bestimmt hatten, können wir es uns alternativ auch einfach machen, es gilt:

$$
\begin{aligned}
\int_{\bar{\gamma}} \left\langle \vec{f}, d\vec{x} \right\rangle &= p\,(1,1,3) - p\,(2,4,5) \\
&= -1+\frac{4}{3}=\frac{1}{3}.
\end{aligned}
$$

Das Ergebnis ist also auf beiden Wegen gleich und lautet $\frac{1}{3}$.

13.4 Radiales Vektorfeld

Es ist mit Hilfe der Integrabilitätsbedingungen zu entscheiden, ob das radiale Vektorfeld $\vec{g}\,(x,y,z) = f\,(r)\,\vec{r}$ ein Potentialfeld ist. Wir betrachten die Integrabilitätsbedingungen, diese lauten $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$. Für den 3D Fall folgt $\vec{\mathrm{rot}}\vec{f} = 0$, bzw. für unseren Fall $\vec{\mathrm{rot}}\vec{g} = \vec{\mathrm{rot}} f\,(r)\,\vec{r} = 0$, mit $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$. Dies liefert also:

$$
\begin{aligned}
\left(\vec{\mathrm{rot}} f\,(r)\,\vec{r}\right)_i &= \left(\nabla \times f\,(r)\,\vec{r}\right)_i = \epsilon_{ijk}\partial_j f\,(r)\,x_k \\
&= \epsilon_{ijk}\left(x_k \partial_j f\,(r) + f\,(r)\,\partial_j x_k\right) \\
&= \epsilon_{ijk}\left(x_k \frac{\partial f\,(r)}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x_j} + f\,(r)\,\delta_{jk}\right) \\
&= \epsilon_{ijk} x_k \frac{\partial f\,(r)}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x_j} + \epsilon_{ijj} f\,(r) \\
&= \epsilon_{ijk} x_j x_k \frac{f'\,(r)}{r}
\end{aligned}
$$

Betrachten wir die j-Komponente:

$$
\begin{aligned}
\left(\vec{\mathrm{rot}} f\,(r)\,\vec{r}\right)_j &= \left(\nabla \times f\,(r)\,\vec{r}\right)_j = \epsilon_{jik}\partial_i f\,(r)\,x_k \\
&= -\epsilon_{ijk}\left(x_k \partial_i f\,(r) + f\,(r)\,\partial_i x_k\right) \\
&= -\epsilon_{ijk}\left(x_k \frac{\partial f\,(r)}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x_j} + f\,(r)\,\delta_{ik}\right) \\
&= -\epsilon_{ijk} x_k \frac{\partial f\,(r)}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x_j} - \epsilon_{iji} f\,(r) \\
&= -\epsilon_{ijk} x_k x_j \frac{f'\,(r)}{r}
\end{aligned}
$$

wobei wir die Integrabilitätsbedingung $\frac{\partial f}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_i}$ ausgenutzt haben. Es gilt also:

$$\epsilon_{ijk} x_j x_k \frac{f'(r)}{r} = -\epsilon_{ijk} x_k x_j \frac{f'(r)}{r},$$

dies wird nur erfüllt durch $\epsilon_{ijk} x_j x_k \frac{f'(r)}{r} = 0$. Somit folgt aber auch:

$$\vec{\mathrm{rot}} f(r) \vec{r} = 0$$

was bedeutet, das $\vec{g}$ ein Potentialfeld ist. Für das Potential p gilt:

$$-\vec{\mathrm{grad}} p = \vec{g} = f(r) \vec{r}$$

Auf Grund der radialen Symmetrie erscheint es sinnvoll in Kugelkoordinaten zu wechseln, diese liefern mit $\vec{\mathrm{grad}} \rightarrow \frac{\partial}{\partial r} \vec{e}_r$ und $\vec{r} = r \vec{e}_r$ für die radiale Richtung $\vec{e}_r$:

$$-\frac{\partial}{\partial r} p = r f(r)$$

Integration liefert also für das Potential:

$$p(r) = p(0) - \int_0^r dr' \, r' f(r') .$$

Auf Grund der radialen Symmetrie gilt $p(r) = p(\vec{r})$ und wir haben das Potential gefunden. Dieses setzt vorraus, das die Funktion $r f(r)$ integrierbar ist. Dies ist jedoch gegeben, wenn $f(r)$ stetig ist, da r auch stetig ist. Da stetige Funktionen integrierbar sind (im Gegensatz zur Differenzierbarkeit, wo z.B. die Betragsfunktion stetig, jedoch nicht diffbar ist), existiert das Potential. Für beliebige Funktionen $f(r)$ gilt dies nicht, da wenn $f(r)$ nicht integrierbar ist, ist das Potential auch nicht definiert.