Heiko Dumlich, Max Hoffmann 16. Januar 2007

11 Übungsblatt Mathematik für Physiker III

11.1 Sphäre

Es ist für eine Sphäre S_t mit $x^2 + y^2 + z^2 = t^2$:

$$F(t) = \int\int_{S_t} f\, dS$$

zu berechnen, wobei f gegeben ist mit

$$f(x,y,z) = \begin{cases} x^2 + y^2, & \sqrt{x^2+y^2} \leq z \\ 0, & sonst. \end{cases}$$

Wir müssen die Funktion daher nur über eine obere Polkappe integrieren, da sie sonst 0 liefert. Um den Winkel zu bestimmen, der uns die Integrationsgrenze für das zu integrierende Gebiet liefert, betrachten wir ein Dreieck mit den Seiten $\sqrt{x^2+y^2}$ und z, wobei diese Seiten gleich sein sollen für den Grenzfall. Die Hypotenuse liefert über Pythagoras $\sqrt{2}z$, daher ist der Winkel $\alpha = \arcsin\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{4}\pi$. Für unsere Integrationsgrenzen folgt daher, wenn wir in ein Koordinatensystem, mit θ, φ-Abhängigkeit wechseln als Grenzen $\theta \in \left[0, \frac{1}{4}\pi\right]$ und $\varphi \in [0, 2\pi]$, hierbei gilt:

$$\Phi(\varphi, \theta) = \begin{pmatrix} t\cos\varphi\sin\theta \\ t\sin\varphi\sin\theta \\ t\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Setzen wir die Parametrisierung in f ein, so folgt:

$$f(\theta, \varphi) = \begin{cases} t^2\sin^2\theta, & \sin\theta \leq \cos\theta \\ 0, & sonst. \end{cases}$$

Den Verzerrungsfaktor können wir direkt aus dem Skript übernehmen, wobei dieser gegeben ist mit $\left|\left|\vec{N}\right|\right| = \sqrt{EG - F^2} = t^2\sin\theta$. Wir können nun das Integral lösen, denn es gilt:

$$F(t) = \int\int_{S_t} f(x,y,z)\, dS = \int\int_B f(\theta,\varphi) \left|\left|\vec{N}\right|\right|\, dB,$$

dies können wir umschreiben zu:

$$F(t) = \int_0^{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} t^4\sin^3\theta\, d\theta d\varphi = 2\pi t^4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3\theta\, d\theta,$$

Wir können das verbleibende Integral lösen:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3\theta \, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1-\cos^2\theta\right)\sin\theta \, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\theta \, d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\theta \sin\theta \, d\theta,$$

das erste Integral ist leicht zu lösen und liefert:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\theta \, d\theta = [-\cos\theta]_0^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} + 1,$$

während wir das zweite mit Hilfe von partielle Integration umschreiben können zu:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\theta \sin\theta \, d\theta = \left[-\cos^3\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\theta \sin\theta \, d\theta.$$

Umstellen liefert dann das Ergebnis:

$$3\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\theta \sin\theta \, d\theta = \left[-\cos^3\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\theta \sin\theta \, d\theta = \left[-\frac{1}{3}\cos^3\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{\sqrt{8}}+1\right).$$

Fügen wir die Ergebnisse zusammen erhalten wir:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3\theta \, d\theta = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+1\right) - \left(\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{\sqrt{8}}+1\right)\right) = \frac{-6\sqrt{2}+12+\sqrt{2}-4}{12} = \frac{8-5\sqrt{2}}{12}$$

Setzen wir das Ergebnis für das Integral ein, so folgt für $F(t)$:

$$F(t) = 2\pi t^4 \left(\frac{8-5\sqrt{2}}{12}\right) \approx 2\pi t^4 \cdot 0.774 \approx 0.486 t^4.$$

11.2 Fluß durch Zylinderoberfläche

a)

Wir teilen die Oberfläche in 3 Teilintegrale auf, indem wir die Mantelfläche und die beiden Kreise an den Enden dieser einzeln betrachten. Wir wählen als Parametrisierung für die Mantelfläche:

$$\phi(\varphi, z) = \begin{pmatrix} R\cos\varphi \\ R\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{matrix} R = 2 \\ \varphi \in [0, 2\pi] \\ z \in [0, 3] \end{matrix}$$

Mit:

$$\frac{\partial\phi}{\partial\varphi} = \begin{pmatrix} -R\sin\varphi \\ R\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \frac{\partial\phi}{\partial z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ergibt sich die Flächennormale zu:

$$\vec{N} = \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \phi}{\partial z} = \begin{pmatrix} R\cos\varphi \\ R\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Mit:

$$\vec{f}\,(x,y,z) = \begin{pmatrix} xy^2 \\ x^2y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R^3\cos\varphi\sin^2\varphi \\ R^3\sin\varphi\cos^2\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{f}\,(\varphi,z)$$

folgt für das Flussintegral:

$$\int_0^3 dz \int_0^{2\pi} d\varphi \left\langle \begin{pmatrix} R^3\cos\varphi\sin^2\varphi \\ R^3\sin\varphi\cos^2\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} R\cos\varphi \\ R\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 3 \cdot R^4 \int_0^{2\pi} d\varphi\, 2\cos^2\varphi\sin^2\varphi,$$

Die Lösung des Integrals mit Bronsteins Hilfe und das Einsetzen von $R = 2$ liefert:

$$3 \cdot 2^5 \int_0^{2\pi} d\varphi\, \cos^2\varphi\sin^2\varphi = 3 \cdot 2^5 \left[\frac{\varphi}{8} - \frac{1}{32}\sin^4\varphi\right]_0^{2\pi} = 3 \cdot 2^5 \frac{\pi}{4} = 3 \cdot 2^3\pi = 24\pi.$$

Bleibt der Fluss durch die Kreise zu berechnen, hierbei benutzen wir die Parametrisierungen:

$$K_1\,(r,\varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{matrix} r \in [0,2] \\ \varphi \in [0,2\pi] \\ z = 0 \end{matrix}$$

bzw.

$$K_2\,(r,\varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{matrix} r \in [0,2] \\ \varphi \in [0,2\pi] \\ z = 3 \end{matrix}$$

Für beide Kreise folgt somit:

$$\frac{\partial K_{1,2}}{\partial r} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \frac{\partial K_{1,2}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

dieses liefert eine Normale mit:

$$\vec{N} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}.$$

Mit:

$$\vec{f}\,(x,y,z) = \begin{pmatrix} xy^2 \\ x^2y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r^3\cos\varphi\sin^2\varphi \\ r^3\sin\varphi\cos^2\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{f}\,(r,\varphi)$$

folgt für das Flussintegral:

$$\int_0^2 dr \int_0^{2\pi} d\varphi \,\langle \begin{pmatrix} r^3\cos\varphi\sin^2\varphi \\ r^3\sin\varphi\cos^2\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix} \rangle = \int_0^2 dr \int_0^{2\pi} d\varphi\, 0.$$

D.h. also der Fluss durch die Kreise verschwindet, dies macht durchaus Sinn, da das Vektorfeld keine z-Komponente besitzt.

b)

Der Gausssche Satz besagt:

$$\int_V \nabla \cdot \vec{f}\, d\,(x,y,z) = \int\int_\Gamma \langle f, d\Gamma\rangle.$$

Dies liefert für unseren speziellen Fall also, wobei wir den Zylinder mit Zylinderkoordinaten parametrisieren, d.h.

$$\phi\,(r,\varphi,z) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{matrix} r \in [0,2] \\ \varphi \in [0,2\pi] \\ z \in [0,3] \end{matrix}$$

Es folgt also für das Divergenzintegral:

$$\int_0^2 dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 dz\, \nabla \cdot f = \int_0^2 dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 dz\, \left(x^2 + y^2\right).$$

Es gilt aber $x^2 + y^2 = r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = r^2$, einsetzen liefert:

$$\int_0^2 dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 dz\, r^3 = 3 \cdot 2\pi \left[\frac{1}{4}r^4\right]_0^2 = 3 \cdot 2\pi \cdot \frac{2^4}{2^2} = 3 \cdot 2^3\pi = 24\pi.$$

Das Divergenzintegral stimmt also mit dem Flussintegral aus Teil a) überein, d.h. der Gaussche Integralsatz gilt für dieses Problem.

11.3 Flächenintegral

Die Fläche berechnet sich als Integral der konstanten Funktion 1 über die Oberfläche.

$$\int\int_{\Gamma} 1 d\Gamma = \int\int_{\Gamma} \sqrt{EG - F^2} d(u,v)$$

Mit dem Verzerrungsfaktor $\sqrt{EG - F^2}$mit

$$\begin{aligned} E &= \left\langle \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial u}, \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial u} \right\rangle \\ G &= \left\langle \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial v}, \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial v} \right\rangle \\ F &= \left\langle \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial u}, \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial v} \right\rangle \end{aligned}$$

Als Parametrisierung wählen wir eine Art Zylinderkoordinaten, wobei die y-Achse die Rotationsachse ist.

$$\begin{aligned} \vec{\phi}(t,\varphi) &= \begin{pmatrix} \gamma_1(t)\cos\varphi \\ \gamma_2(t) \\ \gamma_1(t)\sin\varphi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ \gamma_2(t) \\ r\sin\varphi \end{pmatrix} \qquad r = \gamma_1(t) \end{aligned}$$

Damit können wir den Verzerrungsfaktor ausrechnen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial t} &= \begin{pmatrix} \gamma_1'(t)\cos\varphi \\ \gamma_2'(t) \\ \gamma_1'(t)\sin\varphi \end{pmatrix} \\ \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial \varphi} &= \begin{pmatrix} -\gamma_1(t)\sin\varphi \\ 0 \\ \gamma_1(t)\cos\varphi \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Damit ist

$$E = \left\langle \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial t}, \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial \varphi} \right\rangle = \left(\gamma_1'(t)\right)^2 + \left(\gamma_2'(t)\right)^2$$

$$F = \left\langle \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial \varphi}, \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial \varphi} \right\rangle = \left(\gamma_1(t)\right)^2$$

$$G = \left\langle \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial \varphi}, \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial t} \right\rangle = 0$$

$$\begin{aligned}\sqrt{EF-G^2} &= \sqrt{\left((\gamma_1'(t))^2+(\gamma_2'(t))^2\right)(\gamma_1(t))^2}\\ &= \gamma_1(t)\sqrt{(\gamma_1'(t))^2+(\gamma_2'(t))^2}\end{aligned}$$

Damit erhalten wir einfach:

$$\begin{aligned}F &= \int\int_{\bar{\Gamma}}\gamma_1(t)\sqrt{(\gamma_1'(t))^2+(\gamma_2'(t))^2}d(t,\varphi)\\ &= 2\pi\int_a^b\gamma_1(t)\sqrt{(\gamma_1'(t))^2+(\gamma_2'(t))^2}dt\\ &= 2\pi\int_a^b\vec{e_x}\vec{\gamma}(t)\,||\dot{\bar{\gamma}}(t)||\,dt\\ &= 2\pi\int_{\bar{\gamma}}x\ ds\end{aligned}$$

11.4 Herzkurve (Cardioide)

Mit

$$x=r\cos\varphi\quad,\quad r=1-\sin\varphi$$

und der Parametrisierung:

$$\begin{aligned}\bar{\gamma}(\varphi) &= \begin{pmatrix} r\cos\varphi\\ r\sin\varphi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\varphi-\sin\varphi\cos\varphi\\ \sin\varphi-\sin^2\varphi\end{pmatrix}\\ \dot{\bar{\gamma}}(\varphi) &= \begin{pmatrix}-\sin\varphi-\left(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi\right)\\ \cos\varphi-2\sin\varphi\cos\varphi\end{pmatrix}\end{aligned}$$

wobei

$$\sqrt{(\dot{\gamma}_1(\varphi))^2+(\dot{\gamma}_2(\varphi))^2} = \sqrt{\left[-\sin\varphi-\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right]^2+\left[\cos\varphi-2\sin\varphi\cos\varphi\right]^2}$$

$$\begin{gathered}\sqrt{\left[-\sin\varphi-\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right]^2+\left[\cos\varphi-2\sin\varphi\cos\varphi\right]^2}\\ =\\ \sqrt{\underbrace{\sin^2\varphi+\cos^2\varphi}_{=1}-2\sin\varphi\underbrace{\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)}_{=1}+\underbrace{\cos^4\varphi+2\sin^2\varphi\cos^2\varphi+\sin^4\varphi}_{=\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)^2=1}}\\ =\\ \sqrt{2(1-\sin\varphi)}\end{gathered}$$

folgt:

$$
\begin{aligned}
F &= 2\pi \int_{\bar{\gamma}} x \; ds \\
&= 2\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \gamma_1(\varphi) \sqrt{\left(\dot{\gamma_1}(\varphi)\right)^2 + \left(\dot{\gamma_2}(\varphi)\right)^2} d\varphi \\
&= 2\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x \;\; \sqrt{2\left(1-\sin\varphi\right)} d\varphi \\
&= 2\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r\cos\varphi \sqrt{2} r^{\frac{1}{2}} \; d\varphi \\
&= 2\pi\sqrt{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\varphi \left(1-\sin\varphi\right)^{\frac{3}{2}} d\varphi \\
&= 2\pi\sqrt{2} \left[-\frac{2}{5}\left(1-\sin\varphi\right)^{\frac{5}{2}} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} \\
&= 2\pi\sqrt{2} \left[0 + \frac{8\sqrt{2}}{5} \right] \\
&= \frac{32}{5}\pi.
\end{aligned}
$$