Heiko Dumlich, Max Hoffmann 9. Januar 2007

10 Übungsblatt Mathematik für Physiker III

10.1 Mittlerer Abstand von Punkten zum Ursprung

a)

Die Abstandsfunktion für einen Punkt $\bar{p}$ in Polarkoordinaten zum Ursprung lautet:

$$d(\bar{p}) = r$$

Die Fläche offensichtlich

$$|B| = \int_0^1 r\,dr \int_0^{2\pi} d\varphi = \left[\frac{1}{2}r^2\right]_0^1 \cdot [\varphi]_0^{2\pi} = \pi.$$

Daher ist der durchschnittliche Abstand zum Ursprung:

$$\begin{aligned} \frac{\int_B f}{|B|} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dr\ r^2 &= \frac{1}{\pi}[\varphi]_{\varphi=0}^{2\pi}\left[\frac{r^3}{3}\right]_{r=0}^1 \\ &= \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

b)

Wir wollen den Abstand eines Punkte $\bar{p}$ über die schraffierte Fläche integrieren. Der Betrag der Fläche ist gerade 1, d.h. $|B| = 1$. Um in Polarkoordinaten zu integrieren müssen wir uns vor allen Dingen die richtigen Grenzen überlegen. Der Winkel geht relativ einfach. Für die schraffierte Fläche gilt:

$$\varphi \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right].$$

Nun ist die die obere Grenze des Radius in Abhänigkeit vom Winkel $r(\varphi)$ zu bestimmen: mit Hilfe des Sinussatzes kann man für den Radius folgende Identität ablesen:

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)}{\sqrt{2}} = \frac{\sin(\pi/4)}{r}$$

Daraus folgt

$$r(\varphi) = \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)} = \frac{1}{\cos(\varphi)},$$

wobei φ im mathematisch üblichen Sinne von der positiven x-Achse gegen den Uhrzeigersinn gemessen wird. Dies ist nun also die obere Grenze für r, wobei die untere offensichtlich 0 ist. Zusammen mit JAKOBI-Determinate für die Koordinatentransformation erhalten wir also als Integral der Abstandsfunktion:

$$
\begin{aligned}
{}_{-\pi/4}^{\pi/4} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\cos(\varphi)}} dr\ r^2 &= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} d\varphi \left[\frac{r^3}{3}\right]_{r=0}^{\frac{1}{\cos(\varphi)}} \\
&= \frac{1}{3}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} d\varphi\ \frac{1}{\cos^3(\varphi)} \\
&= \frac{1}{3}\left[\frac{\sin\varphi}{2\cos^2\varphi} + \frac{1}{2}\log\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)\right]_{\varphi=-\pi/4}^{\pi/4} \\
&= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}2 + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}2 + \frac{1}{2}\left(\log\tan\left(\frac{3\pi}{8}\right) - \log\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)\right] \\
&= \frac{1}{3}\left[\sqrt{2} + \frac{1}{2}\log\left(\frac{\tan\left(\frac{3\pi}{8}\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)}\right)\right] \\
&= \frac{1}{3}\left[\sqrt{2} + \frac{1}{2}\log\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)\right] \\
&\approx 0.7652
\end{aligned}
$$

Es gilt hierbei:

$$
\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}} = \sqrt{\frac{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}{\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)}} = \left(\sqrt{2}-1\right)\sqrt{\frac{1}{2-1}} = \sqrt{2}-1
$$

und

$$
\tan\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \sqrt{2}+1.
$$

Die Gesamtfläche beträgt $|B| = 2 \cdot 2 = 4$. Für die gesamte Fläche folgt aber, da wir diese mit 4 der oben berechneten Dreiecke ausfüllen können, wobei diese auf Grund der Symmetrie auch das gleiche Ergebnis liefern:

$$
\frac{\int_B f}{|B|} = \frac{4}{|B|} \cdot \int_{-\pi/4}^{\pi/4} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\cos(\varphi)}} dr\ r^2 = \frac{4}{4}\cdot\frac{1}{3}\left[\sqrt{2} + \frac{1}{2}\log\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)\right] \approx 0.7652.
$$

10.2 Unendlicher Quader

Es ist das uneigentliche Integral $\int\int\int_Q \frac{yz}{x^2} d(x,y,z)$ zu berechnen. Wobei Q der unendliche Quader:

$$
x \geq 1, \quad 0 \leq y \leq 2, \quad 0 \leq z \leq 1
$$

sei.

$$
\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx \int_0^2 y\,dy \int_0^1 z\,dz = \left[-\frac{1}{x}\right]_0^\infty \cdot \left[\frac{1}{2}y^2\right]_0^2 \cdot \left[\frac{1}{2}z^2\right]_0^1 = 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 1.
$$

10.3 Uneigentliches Integral 1

$$
\begin{aligned}
\int\int_{0\leq x\leq y} e^{-(x+y)} d\left(x,y\right) &= \int_0^\infty dx \int_x^\infty dy\ e^{-(x+y)} \\
&= \int_0^\infty dx\ e^{-x} \int_x^\infty dy\ e^{-y} \\
&= \int_0^\infty dx\ e^{-x} \left[-e^{-y}\right]_{y=x}^\infty \\
&= \int_0^\infty dx\ e^{-x} e^{-x} = \int_0^\infty dx\ e^{-2x} \\
&= \left[-\frac{e^{-2x}}{2}\right]_{x=0}^\infty = \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

10.4 Uneigentliches Integral 2

Es ist zu zeigen das

$$F\left(x\right) := \int_0^\infty dt\ e^{-t^2} \cos\left(xt\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} e^{-x^2/4}.$$

Der Integrand

$$h\left(x\right) = e^{-t^2} \cos\left(xt\right)$$

und

$$\frac{\partial h\left(x\right)}{\partial x} = -te^{-t^2} \sin\left(xt\right)$$

sind Produkte stetiger Funktion und somit stetig. Bleibt die gleichmäßige Konvergenz beider uneigentlicher Integral zu zeigen. Es ist zu zeigen, dass für jedes ε ein n derart existiert, dass für $N > M > n$ jeweils gilt:

$$\int_M^N dt\ e^{-t^2} \cos\left(xt\right) < \varepsilon$$

$$\int_M^N dt\ te^{-t^2} \sin\left(xt\right) < \varepsilon$$

Die Faktoren $\sin\left(xt\right)$ und $\cos\left(xt\right)$ kann man durch 1 nach oben abschätzen. Für $n > 1$ kann man die Bedingungen auf folgende Weise ausdrücken:

$$
\begin{aligned}
\int_M^N dt\ te^{-t^2} &= \left[-\frac{e^{-t^2}}{2}\right]_{t=M}^N \\
&= \frac{1}{2}\left(e^{-M^2} - e^{-N^2}\right) \\
&\leq \frac{1}{2} e^{-M^2} \overset{!}{<} \varepsilon
\end{aligned}
$$

D.h. wähle

$$n = \sqrt{\ln\left(\frac{1}{2\varepsilon}\right)}.$$

Somit darf man die Ableitung unter dem Integralzeichen durchführen.

$$\begin{aligned}
\frac{dF(x)}{dx} &= \int_0^\infty dt\ e^{-t^2} \frac{\partial \cos(xt)}{\partial x} \\
&= -\int_0^\infty dt\ e^{-t^2} \sin(xt)\, t \\
&= -\int_0^\infty dt\ \underbrace{te^{-t^2}}_{=:u'} \underbrace{\sin(xt)}_{=:v} \\
&\overset{\text{p.I.}}{=} \underbrace{\left[\frac{e^{-t^2}}{2} \sin(xt)\right]_{t=0}^{\infty}}_{=0} - \int_0^\infty dt\ \frac{e^{-t^2}}{2} \cos(xt)\, x \\
&= -\frac{x}{2} \underbrace{\int_0^\infty dt\ e^{-t^2} \cos(xt)}_{=F(x)}
\end{aligned}$$

Das heisst

$$F'(x) = -\frac{x}{2} F(x) \ \text{ oder } \ \frac{F'(x)}{F(x)} = -\frac{x}{2}.$$

Die linke Seite der 2. Gleichung ist aber auch gerade die Ableitung von $\ln(F(x))$, dager gilt

$$\frac{d}{dx} \ln(F(x)) = -\frac{x}{2}.$$

Beidseitige Anwendung der unbestimmten Integration liefert:

$$\ln(F(x)) = -\frac{x^2}{4} + \tilde{c},$$

wobei $\tilde{c}$ eine noch zu bestimmende Integrationskonstante ist. Beide Seite exponieren führt zu:

$$\begin{aligned}
F(x) &= e^{-\frac{x^2}{4} + \tilde{c}} \\
&= Ce^{-\frac{x^2}{4}}.
\end{aligned}$$

Um C zu bestimmen setzen wir $x = 0$ ein und erhalten:

$$F(0) = C = \int_0^\infty dt\ e^{-t^2}$$

Hier können wir einmal mehr den Polarkoordinatentrick anwenden:

$$\begin{aligned}
C^2 &= \int_0^\infty dt\ e^{-t^2} \int_0^\infty ds\ e^{-s^2} \\
&= \int_0^\infty dt\ \int_0^\infty ds\ e^{-\left(t^2+s^2\right)} \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\ \int_0^\infty dr\ re^{-r^2} \\
&= [\varphi]_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{e^{-r^2}}{2}\right]_{r=0}^{\infty} \\
&= \frac{\pi}{4} \\
C &= \frac{\sqrt{\pi}}{2}
\end{aligned}$$

Somit ergibt sich ingesamt:

$$F\left(x\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{x^2}{4}},$$

was zu zeigen war.