Heiko Dumlich, Max Hoffmann 24. Oktober 2006

1 Übungsblatt Mathematik für Physiker III

1.1 Iterierte Grenzwerte

Der Grenzwert $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ existiert nicht, dies lässt sich leicht folgern, da die Grenzwerte auf verschiedenen Wegen gleich sein müssen und wir für verschiedene Annäherungen verschiedene Grenzwerte erhalten. Hierzu betrachten wir

$$\lim_{(x,y)\to(t,t)} f(x,y) = \frac{t^4}{t^4 + t^2 - 2t^2 + t^2} = 1,$$

da $1 \neq 0$, existiert für $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ kein Grenzwert.

Betrachten wir nun die iterierten Grenzwerte, hierzu wenden den Limes auf $f(x,y)$ an, während wir einen der Parameter konstant halten:

$$\lim_{y\to 0} f(x,y) = \lim_{y\to 0} \frac{x^2y^2}{x^2y^2 + x^2 - 2xy + y^2} = \frac{0}{0+x^2} = 0 = \frac{0}{0+y^2} = \lim_{x\to 0} f(x,y),$$

da jedoch $\lim_{x,y\to 0}(0) = 0$ immer gilt, ist das zu Zeigende bewiesen.

1.2 Sphäre

a)

Zeige, dass $p \to p^*$ stetig ist

Beweis:

$p \to p^*$ stetig $\Leftrightarrow \forall p \in S \, \forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : \mathrm{d}(p,a) < \delta \Rightarrow d(p*, a*) < \varepsilon$

Es gilt:

$$\begin{aligned} d(p,a) &= \sqrt{(p_1 - a_1)^2 + (p_2 - a_2)^2 + (p_3 - a_3)^2} \\ &= \sqrt{(-p_1 + a_1)^2 + (-p_2 + a_2)^2 + (-p_3 + a_3)^2} \\ &= d(p^*, a^*) \end{aligned}$$

Das heißt, setze $\delta = \varepsilon$.

b)

Gegeben ist S zusammenhängend und $f : p \to \mathbb{R}$ stetig für $p \in S$. Zeige, dass es zwei Antipoden mit den gleichen Funktionswerten gibt:

$$f(p) = f(p^*)$$

Beweis:
Wie gezeigt ist die Abbildung $p \to p^*$ stetig. Dann ist die Abbildung

$$g(p) = f(p) - f(p^*)$$

ebenfalls stetig. Fixiere ein $p_0 \in S$. Wenn $g(p_0) = 0$, ist die Forderung bereits erfüllt. Wenn $g(p) \neq 0$, dann ist aber auf Grund der Definition

$$g(p) = -g(p^*) \,.$$

Da S eine zusammenhängende Menge ist, gibt es eine Kurve γ, zwischen p und p^* die alle Werte zwischen $g(p)$ und $-g(p)$, also auch 0 annimmt. Somit ist die Forderung erfüllt. $\square$