1 Aufgaben zur Mathematikvorlesung für Physiker III

Zur Abgabe am 25.10. in der Vorlesungspause

Aufgabe 1.1 Sei f eine für $x, y > 0$ definierte zweistellige Funktion Bei festem $x > 0$ kann man dann $\lim_{y\to 0} f(x, y)$ (hoffentlich) bestimmen. Dadurch entsteht eine einstellige Funktion von x. Analog ist $\lim_{x\to 0} f(x, y)$ eine Funktion von y. Deren jeweilige Grenzwerte für $x \to 0$ bzw. $y \to 0$ nennt man iterierte Grenzwerte von f. Zeigen Sie für die konkrete Funktion $f(x, y) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$, daß die iterierten Grenzwerte existieren und gleich sind

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x, y)\right) = \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x, y)\right) = 0,$$

obwohl der Grenzwert $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ nicht existiert.

Aufgabe 1.2 Wir betrachten die Sphäre (Kugeloberfläche in $\mathbb{R}^3$)

$$S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

und die Abbildung $\bar{p} \mapsto \bar{p}^*$, die jedem Punkt seinen diametral entgegengesetzten (den Antipoden) zuordnet:

$$(x, y, z)^* = (-x, -y, -z).$$

(a) Beweisen Sie, daß $\bar{p} \mapsto \bar{p}^*$ stetig ist (mit ε-δ).

(b) Ist f ein auf S definiertes stetiges Skalarfeld[1] $f : S \to \mathbb{R}$, so gibt es stets zwei Antipoden, in denen f denselben Wert hat: $f(\bar{p}) = f(\bar{p}^*)$.

Jede konstante Funktion zeigt, daß es nicht unbedingt zwei Antipoden geben muß in denen f entgegengesetzte Werte annimmt: $f(\bar{p}) = -f(\bar{p}^*)$
Hinweis: Für (b) benutze man den Zusammenhang von S und den Zwischenwertsatz für das nach (a) stetige Skalarfeld $f(\bar{p}) - f(\bar{p}^*)$.

Für das Tutorium

Aufgabe 1.3 Für den Raum $\mathbb{R}^2$ sind die folgenden Metriken populär

$$\begin{aligned}
d_e\Big((x, y)\,,\,(x', y')\Big) &= \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2} && \text{euklidische Metrik}\\
d_s\Big((x, y)\,,\,(x', y')\Big) &= |x - x'| + |y - y'| && \text{Summenmetrik}\\
d_m\Big((x, y)\,,\,(x', y')\Big) &= \max\left(|x - x'|\,,|y - y'|\right) && \text{Maximummetrik}
\end{aligned}$$

(a) Skizzieren Sie Kugeln und Sphären mit verschiedenen Mittelpunkten und Radien bezüglich jeder der drei Metriken.

(b) Stellen Sie fest, daß für jeweils zwei dieser Metriken d_1, d_2, jede offene d_1-Kugel eine offenen d_2-Kugel mit dem selben Mittelpunkt (aber kleinerem Radius) enthält.

(c) Schließen Sie, daß alle drei Metriken zu denselben offenen bzw. abgeschlossenen Mengen führen.

[1] Tatsächlich gilt das auch für zweidimensionale Vektorfelder (schwierig), aber nicht für dreidimensionale (leicht)!

Aufgabe 1.4 Im Bereich der positiven reellen Zahlen führen wir eine exotische Metrik ein, indem wir $d(x,y) = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|$ setzen. Prüfen Sie, daß es sich um eine Metrik handelt. Folgern Sie aus der Stetigkeit (im üblichen Sinne) der Funktion $\frac{1}{x}$, daß bezüglich der neuen Metrik genau dieselben Folgen gegen genau dieselben Grenzwerte konvergieren, wie in der üblichen Metrik $|x-y|$.
Jede im üblichen Sinne bestimmt divergente Folge von reellen Zahlen, speziell also die Folge der natürlichen Zahlen ist in der neuen Metrik eine CAUCHY-Folge. Der neue Raum ist also nicht vollständig.

Aufgabe 1.5 A und B seien Teilmengen von $\mathbb{R}^2$. Beweisen oder widerlegen Sie durch ein Beispiel (verbale Beschreibung genügt):

(a) Wenn A und B offen sind, dann ist auch $A \cup B$ bzw. $A \cap B$ offen.

(b) Wenn A und B abgeschlossen sind, dann ist auch $A \cup B$ bzw. $A \cap B$ abgeschlossen.

(c) Wenn A und B konvex sind, dann ist auch $A \cup B$ bzw. $A \cap B$ konvex.

(d) Wenn A und B zusammenhängend sind, dann ist auch $A \cup B$ bzw. $A \cap B$ zusammenhängend.

(e) Wenn A und B zusammenhängend sind und $A \cap B \neq \emptyset$, dann ist auch $A \cup B$ zusammenhängend.

(f) Wenn A und B kompakt sind, dann ist auch $A \cup B$ bzw. $A \cap B$ kompakt.

Aufgabe 1.6 Wahr oder falsch? Die Ebene $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+5z = 27\}$ ist eine (a) offenen, (b) abgeschlossenen, (c) zusammenhängende, (d) beschränkte, (e) kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}^3$.
Dieselben Fragen für den Graphen $G := \{(x,y) : y = \ln x;\ x > 0\}$ der Logarithmusfunktion als Teilmenge von $\mathbb{R}^2$.

Aufgabe 1.7 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei im Punkt $(0,0)$ stetig. Da auch die Kurven $t \mapsto (t, at)$ ($a \in \mathbb{R}$ beliebig) und $t \mapsto (0,t)$ stetig sind, müssen auch alle einstelligen Funktionen $f(t, at)$ bzw. $f(0,t)$ in $t = 0$ stetig sein. Sie beschreiben das Verhalten des Feldes f entlang einer Geraden durch den Ursprung.

(a) Benutzen Sie diese Beobachtung, um

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & x = y = 0 \end{cases}$$

als unstetig nachzuweisen.

(b) Untersuchen Sie das Beispiel der Funktion

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & 0 < y = x^2 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Stellen Sie die Unstetigkeit von f fest, obwohl das Feld auf allen Ursprungsgeraden im Nullpunkt stetig ist.

2 Aufgaben zur Mathematikvorlesung für Physiker III

Zur Abgabe am 1. November in der Vorlesungspause

Aufgabe 2.1 Wir betrachten eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und ihren in $\mathbb{R}^2$ enthaltenen Graphen $G = \{(x, y) : y = f(x)\}$. Wahr oder falsch (Beweis oder Gegenbeispiel)?

(a) f stetig $\implies$ G abgeschlossen.

(b) G abgeschlossen $\implies$ f stetig.

Aufgabe 2.2 (Ableitung von Determinanten)
Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $\vec{f}, \vec{g}, \vec{h}$ differenzierbare Vektorfunktionen $I \to \vec{\mathbb{R}}^3$. Dann wird durch $\varphi(t) := \det\Big(\vec{f}(t),\ \vec{g}(t),\ \vec{h}(t) \Big)$ eine Funktion $I \to \mathbb{R}$ definiert. Wie berechnet sich ihre Ableitung (mit Begründung)? Wie sieht wohl die Regel für höherdimensionale Determinanten aus?

Aufgabe 2.3 (Abrundung von Ecken). Finden Sie eine glatte Kurve $\bar{\gamma} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, mit $\bar{\gamma}(t) = (-t, 0)$ für $t \leq -1$, $\bar{\gamma}(t) = (t, t)$ für $t \geq 1$ und $\bar{\gamma}(t) \in K_{(0,0)}(2)$ für $-1 < t < 1$. Machen Sie eine Skizze. Versuchen Sie, Polynome anzusetzen und bestimmen Sie die Koeffizienten so, daß das Ergebnis glatt wird. Prüfen Sie, daß die Kurve in der Kugel bleibt.

Aufgabe 2.4 Der Zylinder $Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x-1)^2 + y^2 = 1\}$ schneidet aus der nördlichen Hemisphäre $S_+ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ z \geq 0\}$ eine Kurve heraus, für die Sie eine Parameterdarstellung finden sollen.

Für das Tutorium

Aufgabe 2.5 $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ seien stetig. Beweisen Sie, daß die Menge

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x) \leq y \leq g(x)\}$$

abgeschlossen ist.

Aufgabe 2.6 (Produktregeln) Es seien $\vec{f}, \vec{g}$ differenzierbare Funktionen $I \to \vec{\mathbb{R}}^n$ Berechnen Sie die Ableitungen von $\vec{f} \times \vec{g}$, $\langle \vec{f}, \vec{g} \rangle$ und $A\vec{f}$, wenn A eine konstante Matrix ist.

Aufgabe 2.7 Finden Sie Parametrisierungen von ebenen Kreisen, Ellipsen und Hyperbeln. Mit verschiedenen Mittelpunkten und auch verdrehten Achsen.

Aufgabe 2.8 Die Sphäre $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ schneidet die Ebene $x + y + z = 0$ in einem Kreis. Geben sie für diesen eine Parametrisierung an.

Aufgabe 2.9 Ergänzen Sie die Vorschrift

$$\bar{\gamma}(t) = \begin{cases} (t, |t|), & |t| \geq 1 \\ (t, \ldots), & |t| < 1 \end{cases}$$

so daß eine reguläre Kurve $\bar{\gamma} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ entsteht und der ergänzte Teil innerhalb der Kugel $K_{(0,0)}(\sqrt{2})$ verläuft.

Zusätze

Aufgabe 2.10 Den Mittelwertsatz der Differentialrechnung kann man geometrisch so interpretieren: Jede Sekante eines Funktionsgraphen ist parallel zu einer geeigneten Tangente. Gilt das

(a) für beliebige glatte Kurven in $\mathbb{R}^2$? (b) für beliebige glatte Kurven in $\mathbb{R}^3$?

Hinweis: Frage (a) hatten wir im ersten Semester beantwortet, ohne sie zu stellen; Suchen Sie in der Umgebung des Mittelwertsatzes (Abschnitt 4.4). (b) wird so ziemlich von jeder Raumkurve widerlegt; beschreiben Sie ein Beispiel, wo das besonders deutlich wird.

Aufgabe 2.11 (mehrstellige Polynome) So nennt man Funktionen, die sich als endliche Summen von sogenannten Monomen schreiben lassen. Diese wiederum sind Produkte aus Zahlen (Koeffizienten) und Unbestimmten. Ein typisches dreistelliges Polynom hat die Form

$$\sum a_{pqr} x^p y^q z^r \qquad \text{(endliche Summe)}$$

Glieder mit Nullen als Koeffizienten werden nicht mitgeschrieben. Die weiteren Begriffe sind eigentlich selbsterklärend. Der Grad des Monoms $ax^p y^q z^r$ ist $p+q+r$. Der Grad des Polynoms ist der maximale Grad eines vorkommenden Monoms.
Addition und Multiplikation von mehrstelligen Polynomen erfolgt auf die naheliegende Weise.
Der Einfachheit halber betrachten wir in der folgenden Aufgabe ein zweistelliges Polynom $f(x,y) = \sum a_{pq} x^p y^q$. Überlegen Sie selbst, ob die Aussagen bei mehr als zwei Variablen gültig bleiben.

(a) Zeigen Sie, daß $f(x,y)$ unendlich viele Nullstellen in $\mathbb{R}^2$ haben kann, ohne doch konstant Null zu sein.

(b) Wenn $f(x,y) = 0$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, so müssen alle Koeffizienten a_{pq} Null sein.

(c) Wenn $f(x,y) \geq 0$, für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, so muß f geraden Grad haben.

Ein nützlicher Trick besteht darin, die Variablen zu sortieren. Im zweistelligen Fall schreibt man etwa

$$f(x,y) = g(x) + h(x)y + l(x)y^2 + \ldots$$

Es entsteht ein Polynom, dessen Koeffizienten Polynome in der restlichen Variablen sind.

3 Aufgaben zur Mathematikvorlesung für Physiker III

Zur Abgabe am 8. November in der Vorlesungspause

Aufgabe 3.1 Die Kurve mit der Gleichung[2]

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$$

($a > 0$) heißt *Astroide* (wenn Sie eine Skizze machen, sehen sie warum). Berechnen Sie den Umfang mit Hilfe der Parametrisierung $x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t$.

Aufgabe 3.2 Die Kurve $\bar{\gamma} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit $\bar{\gamma}(t) = (e^{ct} cost, e^{ct}\sin t)$ heißt *logarithmische Spirale*. Dabei ist $c \neq 0$ ein Parameter, den wir sogar positiv annehmen ($c < 0$ entspricht nur 'Zeitumkehr').

(a) Skizzieren Sie zwei Windungen der Spirale, etwa für $c = \frac{1}{2\pi}$ und $t \in [-2\pi, 2\pi]$.

(b) Berechnen Sie die Länge der Kurve zwischen den Parameterwerten $t = a$ und $t = b$. Was passiert für $a \to -\infty$?

(c) Zeigen Sie, daß jeder Kreis um den Nullpunkt von der logarithmischen Spirale genau einmal geschnitten wird und bestimmen Sie den Kosinus des Schnittwinkels.

Aufgabe 3.3 Ein Massepunkt soll in dem durch $\vec{f}(x, y, z) := \begin{pmatrix} -cx \\ -cy \\ -cz \end{pmatrix}$ definierten Kraftfeld von $\bar{a} = (1, 0, 0)$ nach $\bar{b} = (1, 0, 1)$ bewegt werden und zwar (a) auf der Strecke und (b) auf der Schraubenlinie mit der z-Achse als Achse (Skizze!). c ist eine positive Konstante. Welche Bewegung braucht mehr Energie?

Aufgabe 3.4 Das zweidimensionale Vektorfeld $\vec{f}(x, y) = \binom{-y}{x}$ soll entlang verschiedener Kurven integriert werden[3]. Klassisch schreibt man $\int_{\bar{\gamma}} -ydx + xdy$. Integrieren Sie $\vec{f}$

(a) entlang der von (a, b) nach (c, d) führenden Strecke.

(b) um das Kreissegment herum, das gebildet wird von der Strecke $(0, 0) \rightsquigarrow (1, 0)$, dem Einheitskreisbogen $(1, 0) \rightsquigarrow (\cos\varphi, \sin\varphi)$ und der Strecke vom letzten Punkt zurück zum Ursprung.

(c) um das 'Dreieck' herum, das aus dem Bogen der Einheitshyperbel von (1,0) zum Punkt mit denn Koordinaten $(\cosh u, \sinh u)$ besteht ($u > 0$) und den beiden Strecken, die dessen Endpunkte mit dem Nullpunkt verbinden.

In (c) benutzen Sie die Parametrisierung $t \mapsto (\cosh t, \sinh t)$ für die Hyperbel. Die Beziehungen $\cosh^2 - \sinh^2 = 1$ und $\sinh' = \cosh, \cosh' = \sinh$ erleichtern das Rechnen.

[2] Dabei ist $z^{2/3}$ als $\sqrt[3]{z^2}$ auch für negative z problemlos zu verstehen.

[3] Das ist deshalb interessant, weil bei geschlossenen Kurven $\bar{\gamma}$ gerade $\pm$ das doppelte des eingeschlossenen Flächeninhaltes herauskommt (beweisen wir später).

Für das Tutorium

Aufgabe 3.5 (Radkurve oder Zykloide) Ein beweglicher Kreis mit Radius R rollt reibungsfrei mit konstanter Geschwindigkeit 1 auf der x-Achse entlang. Zum Zeitpunkt $t = 0$ soll sich der Mittelpunkt auf der y-Achse befinden.
Welche Kurve beschreibt der zum Zeitpunkt $t = 0$ im Koordinatenursprung liegende Punkt? Geben Sie eine Parametrisierung an und bestimmen sie die Länge des Weges, den der Punkt bei einer vollen Umdrehung des Kreises zurücklegt.
Hinweis: Bei der Berechnung des Integrals ist die Beziehung $1 - \cos t = 2\sin^2 \frac{t}{2}$ nützlich.
Mehr Informationen über diese und andere interessante Kurven findet man im Internet. Entweder Sie suchen 'Zykloide' bzw. 'cycloide' mit Google. Oder gleich (allerdings französisch)

http://www.mathcurve.com

Aufgabe 3.6 Das auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ definierte Vektorfeld $\frac{1}{x^2+y^2}\binom{-y}{x}$. soll entlang verschiedener Kurven integriert werden, die jeweils vom Punkt $(1,0)$ zum Punkt $(0,1)$ verlaufen. Und zwar

(a) dem Einheitskreisbogen durch den I Quadranten.

(b) dem Einheitskreisbogen durch den II, III und IV Quadranten.

(c) den Streckenzug über den Zwischenpunkt $(1,1)$.

Wer Lust hat kann zusätzlich auch direkt entlang der Verbindungsstrecke integrieren. Das macht etwas mehr Mühe.

Aufgabe 3.7 Berechnen Sie $\oint e^{-(x^2-y^2)}[\cos 2xy\; dx + \sin 2xy\; dy]$ um das Quadrat mit den Eckpunkten $(\pm 1, \pm 1)$ herum.

4 Aufgaben zur Mathematikvorlesung für Physiker III

Zur Abgabe am 15. November in der Vorlesungspause

Aufgabe 4.1 Berechnen Sie die JACOBImatrix $J_f(1,-1)$ der Funktion $f(x,y) = xy + \frac{x}{y}$.

Aufgabe 4.2 Wir definieren $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3+y^3}$, wobei die dritte Wurzel auch für negative Radikanden (als $-\sqrt{|x^3+y^3|}$) definiert sein soll. Berechnen Sie $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$, falls diese definiert sind und entscheiden Sie, ob die Funktion in $(0,0)$ (total) differenzierbar ist.

Aufgabe 4.3 In welchen Punkten (x,y,z) ist der Gradient des Skalarfeldes

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$$

(a) senkrecht zur z-Achse, (b) parallel zur z-Achse und (c) der Nullvektor?
Um welche Art Punktmengen handelt es sich geometrisch gesehen?

Aufgabe 4.4 Das Skalarfeld g sei auf ganz $\mathbb{R}^3$ definiert und C^1. Das zugehörige Gradientenfeld $\vec{f} = \vec{\operatorname{grad}}\, g$ möge schneller als $\frac{1}{r}$ abklingen: genauer $\|\vec{f}(x,y,z)\| \le \frac{C}{r^{1+\varepsilon}}$ für ein positives ε.
Beweisen Sie, daß g beschränkt ist.
Hinweis: Wegen der Stetigkeit ist g sicher auf der Einheitskugel beschränkt, etwa durch A. Hat (x,y,z) einen Abstand $r > 1$ vom Nullpunkt, so gilt

$$g(x,y,z) = g\left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right) + \int_1^r \frac{d}{dt} g\left(t\frac{x}{r}, t\frac{y}{r}, t\frac{z}{r}\right)\, dt.$$

Der erste Summand hat Betrag $\le A$, den zweiten müssen Sie abschätzen.

Für das Tutorium

Aufgabe 4.5 Berechnen Sie die JACOBImatrix $J_f(1,-1)$ der Funktion $f(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Aufgabe 4.6 Betrachtet wird die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, die in $(0,0)$ den Wert 0 annimmt und sich ansonsten nach der Formel $f(x,y) = \frac{x^3}{x^2+y^2}$ berechnet. Zeigen Sie, daß f auf ganz $\mathbb{R}^2$ stetig ist. Für jede (parametrisierte) Gerade $\bar{\gamma}(t) = (at, bt)$ ist $f \circ \bar{\gamma}$ überall differenzierbar. Das gilt sogar für beliebige differenzierbare Kurven $\bar{\gamma}$ (etwas schwieriger). Trotzdem ist f nicht differenzierbar in $(0,0)$.

Aufgabe 4.7 (Kettenregel für Funktionen mit wenigen Variablen). Unter der Voraussetzung, daß $F(u,v,w)$ und $f(x,y), g(x,y)$ und $h(x,y)$ C^1-Funktionen sind, sollen Sie die Formeln für

$$\frac{\partial}{\partial x} F(f(x,y), g(x,y), h(x,y)) = \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial}{\partial y} F(f(x,y), g(x,y), h(x,y)) =$$

aufschreiben. Angenommen die partiellen Ableitungen sollen im Punkt (a,b) berechnet werden. Welche Werte sind in die partiellen Ableitungen der beteiligten Funktionen einzusetzen?

Aufgabe 4.8 Wie üblich ist $\vec{r}$ das Vektorfeld, das jedem Punkt seinen Ortsvektor zuordnet; $r := \|\vec{r}\|$ ist der Abstand vom Nullpunkt: $r = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$.
Dann ist $\frac{1}{r^k}$ außer im Nullpunkt überall definiert und sie sollen $\vec{\operatorname{grad}}\, \frac{1}{r^k}$ ausrechnen.

5 Aufgaben zur Mathematikvorlesung für Physiker III

Zur Abgabe am 22.11. in der Vorlesungspause

Aufgabe 5.1 Finden Sie den Anstieg der Tangente an die Kurve mit der Gleichung $x^3 - 2y^2 = 25$ im Punkt $(3, 1)$. Schreiben Sie die Tangentengleichung auf.

Aufgabe 5.2 Das Gleichungssystem

$$xe^{u+v} + 2uv = 1 \qquad ye^{u-v} - \frac{u}{1+v} = 2x$$

definiert u und v in einer Umgebung des Punktes $(1, 2)$ als Funktionen von x, y, wobei $u(1, 2) = 0$ und $v(1, 2) = 0$.

(a) Stimmt das? Woran sieht man das?

(b) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial x}(1, 2)$, $\frac{\partial v}{\partial x}(1, 2)$.

$\frac{\partial u}{\partial y}(1, 2)$ und $\frac{\partial v}{\partial y}(1, 2)$ sind auch nicht schwerer, aber ich will Ihre Zeit nicht unnötig beanspruchen.

Aufgabe 5.3 In der Nähe des Punktes $(1, 1, 1)$ definiert die Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$$

sowohl z als Funktion $z = f(x, y)$ als auch y als Funktion $y = g(x, z)$ der jeweils beiden anderen Variablen. Setzen Sie diese Funktionen in $h(x, y, z) = xy^2z^3$ ein und berechnen Sie die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial}{\partial x} h(x, y, f(x, y)) \text{ und } \frac{\partial}{\partial x} h(x, g(x, z), z)$$

im Punkt $(1, 1)$.

Aufgabe 5.4 Die sogenannte Lemniskate ist durch die Gleichung

$$(x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2)$$

definiert. Finden Sie ein minimales Rechteck, in dem diese Kurve liegt. Finden Sie dazu alle Punkte mit senkrechter und waagerechter Tangente. Machen Sie eine Skizze.

Für das Tutorium

Aufgabe 5.5 (Implizite Funktionen bei wenigen Variablen). Welche Bedingung müssen eine Funktion $F(x, y, z)$ und ein Punkt (x_0, y_0, z_0) erfüllen, damit z in der Nähe dieses Punktes als implizite Funktion von x, y definiert wird. Nach welcher Formel werden die partiellen Ableitungen dieser Funktion berechnet?

Dieselbe Frage für zwei Funktionen $F(x, y, z)$ und $G(x, y, z)$, die x und y als implizite Funktionen von z definieren sollen. Wie bestimmt man die Ableitungen dieser Funktionen?

Aufgabe 5.6 $F(x, y, z)$ sei eine C^1-Funktion, deren partielle Ableitungen im Punkt (x_0, y_0, z_0) alle von Null verschieden sein sollen. Dann definiert F jede der drei Variablen in einer Umgebung des Punktes als Funktion der beiden anderen, etwa $x = f(y, z),\ y = g(x, z); z = h(x, y)$. Rechnen sie nach, daß

$$\frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial g}{\partial z} \cdot \frac{\partial h}{\partial x} = -1.$$

In der Praxis schreibt man statt f, g, h gern $x = x(y, z), y = y(x, z)$ und $z = z(x, y)$ gibt also den Buchstaben jeweils zwei Bedeutungen. Dann sieht die obige Formel etwas unerwartet aus:

$$\frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = -1.$$

Aufgabe 5.7 (Parametrische Definition von Funktionen)
Bodenständige Formulierung: Beweisen Sie, daß das Gleichungssystem

$$x = u + v,\ y = u^2 + v^2,\ z = u^3 + v^3 \quad u, v \in \mathbb{R}$$

die Variable z als Funktion von x, y definiert. Bestimmen Sie den Definitionsbereich dieses Skalarfeldes und berechnen Sie $\frac{\partial z}{\partial x}$ und $\frac{\partial z}{\partial y}$ (in Abhängigkeit von den zugehörigen Parameterwerten u, v).

Exaktere Formulierung: Weisen Sie nach, daß die parametrisch beschriebene Oberfläche

$$\Gamma = \{\ (u + v, u^2 + v^2, u^3 + v^3)\ :\ u, v \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

Graph eines auf einem Teil der x, y-Ebene definierten Skalarfeldes $f : D \to \mathbb{R}$ ist. Finden Sie D und beweisen Sie, daß f im Inneren von D differenzierbar ist. Berechnen Sie $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$

Anleitung: In diesem durchsichtigen Fall, ist geradliniges Rechnen einfacher als Benutzung von Theorie. Man stellt die Gleichungen $x = u + v,\ y = u^2 + v^2$ nach u und v um und setzt in $z = u^3 + v^3$ ein (ausrechnen ist nicht nötig). Dabei erkennt man, wo das geht (bestimmt also D), und sieht, daß die Zweideutigkeit keinen Einfluß hat. Die Formeln zeigen auch, daß u und v im Inneren von D stetig nach x und y differenzierbar sind. (Das würde auch aus dem Umkehrsatz folgen.) Die partiellen Ableitungen kann man dann aus dem Gleichungssystem bestimmen, das entsteht, wenn die Ausgangsgleichungen nach x bzw. y differenziert werden:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3u^2 \frac{\partial u}{\partial x} + 3v^2 \frac{\partial v}{\partial x}, \qquad \text{wobei} \qquad \begin{array}{rcl} 1 & = & \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ 0 & = & 2u\frac{\partial u}{\partial x} + 2v\frac{\partial v}{\partial x} \end{array}.$$

Aufgabe 5.8 Beweisen Sie, daß durch die Gleichung

$$x + y + z = e^z$$

auf der offenen Halbebene $x + y > 1$ eindeutig ein positives Skalarfeld $z = f(x, y)$ definiert wird. Beweisen Sie, daß f stetig differenzierbar ist.

6 Aufgaben zur Mathematikvorlesung für Physiker III

Zur Abgabe am 29. November in der Vorlesungspause

Aufgabe 6.1 Bestimmen Sie den größten Funktionswert der Funktion

$$\sin x + \cos y + \cos(x - y)$$

im Quadrat $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$.
Hinweise: Rand beachten! Im angegebenen Bereich für x und y kann $\cos x = \sin y$ nur gelten, wenn ...?

Aufgabe 6.2 Finden Sie das Maximum und Minimum der Determinante

$$\begin{vmatrix} x & u \\ y & v \end{vmatrix}$$

falls $x^2 + y^2 = u^2 + v^2 = 1$. Schließen Sie, daß in $\vec{\mathbb{R}}^2$ gilt $\left|\det(\vec{a}, \vec{b})\right| \leq \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|$.
Diese sogenannte Hadamardsche Ungleichung gilt für beliebige $\vec{\mathbb{R}}^n$. Was ist die geometrische Interpretation?

Aufgabe 6.3 Finden Sie den größten und kleinsten Wert der Funktion xyz auf dem Kreis, der sich als Schnittkurve der Kugel $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ mit der Ebene $x + y + z = 0$ ergibt.
Orientieren Sie sich an 3.6.12. Die Punkte, in denen die Extremwerte angenommen werden, sind nicht gefragt.

Aufgabe 6.4 Welchen maximalen Wert kann $\sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma$ für die Winkel eines ebenen Dreiecks annehmen? Bei welcher Art Dreieck wird dieser maximale Wert realisiert?
Hinweis: Erinnern Sie sich an die Winkelsumme im Dreieck.

Für das Tutorium

Aufgabe 6.5 Bestimmen Sie den größten Funktionswert der Funktion

$$\sin x \cdot \sin y \cdot \sin(x + y)$$

im Quadrat $0 \leq x \leq \pi,\ 0 \leq y \leq \pi$.
Hinweis: Rand beachten! Ein rückwärts gelesenes Additionstheorem könnte helfen.

Aufgabe 6.6 Welchen maximalen Wert kann $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma$ für die Winkel eines ebenen Dreiecks annehmen? Bei welcher Art Dreieck wird dieser maximale Wert realisiert?
Hinweis: Erinnern Sie sich an die Winkelsumme im Dreieck.

Aufgabe 6.7 (Ausgleichsgerade auf $[0, 1]$) Gegeben sei eine stetige Funktion $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$. Gesucht ist eine 'lineare' Funktion $g(x) = px + q$, für die der mittlere quadratische Fehler

$$\int_0^1 (f(x) - g(x))^2 \, dx$$

minimal wird. Warum gibt es so eine, aber keine Gerade mit maximalem Fehler?

Aufgabe 6.8 Beweisen Sie für $n \geq 1, x \geq 0, y \geq 0$, daß

$$\frac{x^n + y^n}{2} \geq \left(\frac{x + y}{2}\right)^n$$

indem sie das Minimum der Funktion $\frac{1}{2}(x^n + y^n)$ unter der Bedingung $x + y = c$ suchen. Kann man nach demselben Schema auch

$$\frac{\sqrt[n]{x} + \sqrt[n]{y}}{2} \geq \sqrt[n]{\frac{x + y}{2}}$$

beweisen (dann ist was faul)?

Aufgabe 6.9 Diskutieren Sie die Lösung von 3.6.12 aus dem Skript: Finden Sie den größten und kleinsten Wert der Funktion $xy + yz$ auf dem Kreis, der sich als Schnittkurve des Zylindes $x^2 + y^2 = 2$ mit der Ebene $y + z = 2$ ergibt.

7 Aufgaben zur Mathematikvorlesung für Physiker III

Zur Abgabe am 4. Dezember in der Vorlesungspause

Aufgabe 7.1 Das zeitabhängige Skalarfeld $f(x, y, z, t)$ sei für $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ und positive t durch

$$f(x, y, z, t) = \sqrt{\frac{1}{t^3}} \cdot \exp\left(-\frac{x^2 + y^2 + z^2}{4t}\right)$$

definiert. Rechnen Sie nach, daß f die sogenannte Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

erfüllt. Kurzschreibweise ist übrigens $\frac{\partial f}{\partial t} - \Delta f = 0$.

Aufgabe 7.2 Für die beliebig oft differenzierbare einstellige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definieren wir $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ durch $u(x, y, z) := f(xyz)$. Zeigen Sie, daß es eine einstellige Funktion F derart gibt, daß

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = F(xyz)$$

gilt. Finden Sie F (indem Sie $F(t)$ mit Hilfe der Ableitungen von f ausdrücken).

Aufgabe 7.3 Bestimmen Sie das Taylor-Polynom zweiten Grades der Funktion x^y im Punkt $(1, 1)$

Aufgabe 7.4 Untersuchen Sie die Funktion $x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}$ im Bereich $x, y, z > 0$ auf Extremwerte. Bis zum Ende mit Hesse-Matrix.

Für das Tutorium

Aufgabe 7.5 Bestimmen Sie das Taylor-Polynom vierten (r-ten) Grades der Funktion $\frac{x}{y}$ im Punkt $(1, 1)$

Aufgabe 7.6 Untersuchen Sie die Funktion $(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2)$ auf relative Extremwerte. Überprüfen Sie in den verdächtigen Punkten auch die hinreichenden Bedingungen.
Hinweis: Beim Lösen des Gleichungssystems darf man nicht durch $x = 0$ bzw $y = 0$ teilen.

Wer möchte kann zusätzlich überlegen, ob es eine gute Idee ist, $x^2 = u, y^2 = v$ zu setzen, relative Extremwerte von $(u + v)^2 - 2a^2(u - v)$ zu suchen und dann in (x, y) zurückzurechnen.

Aufgabe 7.7 Untersuchen Sie die Funktion $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y + -6z$ auf Extremwerte. Bis zum Ende mit Hesse-Matrix.

Wer noch mit höheren partiellen Ableitungen rumrechnen möchte (keine Abgabe):

Aufgabe 7.8 Angenommen $u(x, y)$ ist eine auf ganz $\mathbb{R}^2$ definierte harmonische Funktion (d.h. u erfüllt die sogenannte Laplace-Gleichung $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$).
Rechnen Sie nach, daß dann auch die auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ definierte Funktion

$$v(x, y) := u\left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2}\right)$$

harmonisch ist.

8 Aufgaben zur Mathematikvorlesung für Physiker III

Zur Abgabe am 13. Dezember in der Vorlesungspause

Aufgabe 8.1 Die zweistellige Funktion $f(x,y)$ wird im Einheitskreis $x^2 + y^2 \leq 1$ nach der Vorschrift $f(x,y) = e^{xy^2}$ berechnet. Außerhalb des Kreises soll f konstant Null sein.
Für $-1 \leq x \leq 1$ definieren wir $F(x) = \int_{-1}^{1} f(x,y)\,dy$ Begründen Sie, daß F stetig und in $]-1,1[$ auch differenzierbar ist und berechnen Sie $F(0)$ und $F'(0)$. Hinweis: Schreiben Sie F als Integral einer stetigen Funktion mit variablen Grenzen.

Aufgabe 8.2 Leiten Sie die Formel von FRULLANI her:

$$\int_0^\infty \frac{f(ax) - f(bx)}{x}\,dx = [f(0) - f(\infty)] \cdot \log\frac{b}{a}. \qquad \text{wobei } f(\infty) :== \lim_{x\to\infty} f(x)$$

Hinweis: Versuchen Sie $\frac{f(ax)-f(bx)}{x}$ als $\int_a^b g(x,t)\,dt$ zu schreiben und wenden Sie FUBINI an. Rechnen Sie erst drauflos und überlegen Sie danach, welche Voraussetzungen Sie an f, a, b stellen müssen.

Aufgabe 8.3 Berechnen Sie $\displaystyle\int_1^2 \int_1^x \frac{x}{y}\,dy\,dx$

Aufgabe 8.4 Berechnen Sie $\displaystyle\int_0^1 \int_0^1 (x+y)\cdot sgn(x-y)dxdy,$ wobei sgn die Signum-Funktion ist, die das 'Vorzeichen' $(+1, -1$ oder $0)$ einer reellen Zahl angibt.

Für das Tutorium

Aufgabe 8.5 I und J seien offene Teilintervalle von $\mathbb{R}$ und $f : I \times J \to \mathbb{R}$ ein C^2-Skalarfeld, dessen gemischte Ableitung $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ konstant Null ist. Muß es dann differenzierbare einstellige Funktionen u, v derart geben, daß $f(x,y) = u(x) + v(y)$?
Hinweis: Versuchen Sie den Ansatz $u(x) = f(x,t)$ und $v(y) = \int_t^y \frac{\partial f}{\partial y}(x,s)\,ds$, für ein festes $t \in J$.

Aufgabe 8.6 Berechnen Sie $\displaystyle\int_0^1 \int_0^2 e^{x+y} \cdot sgn(x-y)dydx,$ wobei sgn die Signum-Funktion ist, die das Vorzeichen einer reellen Zahl angibt.

Aufgabe 8.7 Berechnen Sie $\displaystyle\int_0^1 \int_0^1 \int_a^b (yz)^x dxdydz,$ wobei $0 < a < b$. Hinweis: FUBINI.

Aufgabe 8.8 Beweisen Sie $\displaystyle\int_0^\infty t^n e^{-t}\,dt = n!$ Berechnen Sie dazu $\int_0^\infty e^{-xt}\,dt$ und differenzieren dann n mal nach x; setzen Sie schließlich $x = 1$.

Für Rechenkünstler (keine Abgabe): Leiten Sie die Formel

$$\frac{d}{dx}\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,t)\,dt = \int_{g(x)}^{h(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt + f(x,h(x)) \cdot h'(x) - f(x,g(x)) \cdot g'(x)$$

her, indem Sie die Leibnizformel auf das transformierte Integral

$$\int_0^1 f(x,\, g(x) + u[h(x) - g(x)]) \cdot [h(x) - g(x)]\,du$$

anwenden.

9 Aufgaben zur Mathematikvorlesung für Physiker III

Zur Abgabe am 20. Dezember in der Vorlesungspause

Aufgabe 9.1 Es seien $a < a_1 < b_1 < b$ und $c < c_1 < d_1 < d$ reelle Zahlen.
Wir setzen $R = [a, b]\times[c, d]$ und $R_1 = [a_1, b_1]\times[c_1, d_1]$. Dann handelt es sich um ineinanderliegende Rechtecke: $R_1 \subseteq R$. Angenommen $f : R \to \mathbb{R}$ ist über R integrierbar. Beweisen Sie, daß f dann auch über R_1 integrierbar ist.

Aufgabe 9.2 Die Koordinaten (x_c, y_c) des Schwerpunkt eines mit Masse belegten Flächenstücks berechnen sich nach den Formeln (alle Integrale über das betrachtete Flächhenstück):

$$x_c = \frac{1}{M}\iint x \cdot \mu(x, y)\, d(x, y) \qquad y_c = \frac{1}{M}\iint y \cdot \mu(x, y)\, d(x, y),$$

wobei $M = \iint \mu(x, y)\, d(x, y)$ die Gesamtmasse der Fläche ist und $\mu(x, y)$ die Dichte im Punkt (x, y) bezeichnet.
Berechnen Sie den Schwerpunkt des gleichmäßig ($\mu = \mathit{const}$) belegten Flächenstücks, das von den Geraden $y = 0$ und $x = 4$ und einem Bogen der Parabel $y^2 = 4x$ berandet wird.

Aufgabe 9.3 Die Achsen zweier gerader Kreiszylinder desselben Radius r schneiden sich senkrecht. Berechnen Sie das Volumen des Durchschnitts.
Hinweis: Benutzen Sie $Z_1 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \le r^2\}$ und $Z_2 = \{(x, y, z) : y^2 + z^2 \le r^2\}$.

Aufgabe 9.4 Berechnen Sie das Volumen des durch die Ungleichungen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1 \quad \text{und} \quad 0 \le z \le \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b}\right)$$

definierten Körpers.
Hinweis: Führen Sie 'elliptische Zylinderkoordinaten' ein: $x = ar\cos\varphi, y = br\sin\varphi, z = z$.

Für das Tutorium

Aufgabe 9.5 Bestätigen Sie die Dirichletsche Formel

$$\int_a^b \left(\int_a^x f(x, y)dy\right) dx = \int_a^b \left(\int_y^b f(x, y)dx\right) dy$$

wobei f in allen vorkommenden Punkten stetig sein soll und $a < b$.
Hinweis: Schreiben Sie beide iterierte Integrale als dasselbe Doppelintegral.

Aufgabe 9.6 Berechnen Sie (einige der Integrale)

$$\iint x^2\, d(x, y), \quad \iint y^2\, d(x, y), \quad \iint xy\, d(x, y), \quad \iint y\, d(x, y)$$

jeweils über die obere Hälfte des Einheitskreises. Benutzen Sie abwechselnd kartesische und Polarkoordinaten.

Aufgabe 9.7 Aus einer Kugel vom Radius R wird ein Zylinder vom Radius a herausgebohrt, wobei die Zylinderachse durch den Kugelmittelpunkt gehen soll. Berechnen Sie das Volumen der durchlöcherten Kugel. Bei welchem a ist es gerade halb so groß wie das Volumen der Ausgangskugel?
Hinweis: Benutzen Sie Zylinderkoordinaten.

Aufgabe 9.8 Für $n \geq 1$ und $a > 0$ sei das Simplex $Sim(n; a)$ definiert als

$$Sim(n;a) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : 0 \leq x_i \text{ und } \sum_{i=1}^{n} x_i \leq a\}$$

Veranschaulichen Sie sich $Sim(n, a)$ für $n = 1, 2, 3$!
Berechnen Sie das n-dimensionale Volumen $|Sim(n, a)|$. Welchen Grenzwert hat es bei festem a für $n \to \infty$.

Achtung Klausurtermin 24. 1. 07

10 Aufgaben zur Mathematikvorlesung für Physiker III

Achtung: Das Tutorium am Donnerstag 21. 12. findet ausnahmsweise im Seminarraum T3 (1.3.48) statt.

Zur Abgabe am 10. Januar 2007 in der Vorlesungspause

Aufgabe 10.1 Als Mittelwert der Funktion f auf der Menge B bezeichnet man den Quotienten aus $\int_B f$ und $|B|$.
Bestimmen Sie den mittleren Abstand eines Punktes von

$$(a) \quad \text{der Einheitskreisscheibe } K_{\bar{0}}(1) \quad \text{und} \quad (b) \quad \text{des Quadrates } [-1,1] \times [-1,1]$$

vom Ursprung $\bar{0}$.
Hinweis: Teil (b) hat es rechnerisch in sich; es ist günstig Polarkoordinaten zu benutzen und das Integral über Viertelquadrate zu erstrecken (aus Symmetriegründen genügt eines). Um es Ihnen zu ersparen habe ich im Bronstein nachgeschlagen

$$\int \frac{d\varphi}{\cos^3 \varphi} = \frac{\sin \varphi}{2 \cos^2 \varphi} + \frac{1}{2} \log \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right).$$

Ausserdem braucht man vielleicht $\tan \frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}}$.
Als Physiker dürfen Sie aber auch mit einer Dezimalzahl antworten.

Aufgabe 10.2 Berechnen Sie das uneigentliche Integral $\int\int\int_Q \frac{yz}{x^2} d(x,y,z)$ wobei Q der unendliche Quader

$$x \geq 1, \quad 0 \leq y \leq 2, \quad 0 \leq z \leq 1$$

sein soll.

Aufgabe 10.3 Berechnen Sie das uneigentliche Integral

$$\iint_{0 \leq x \leq y} e^{-(x+y)} d(x,y).$$

Aufgabe 10.4 (Die Aufgabe gehört eher zu Abschnitt 4.2) Beweisen Sie

$$\int_0^\infty e^{-t^2} \cos(tx)\, dt = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} e^{-x^2/4}$$

Vorgehen: Nennen Sie das Integral $F(x)$. Begründen Sie, daß $F'(x)$ durch Differentiation unter dem Integralzeichen bestimmt werden darf. Rechnen Sie $F'(x) = -\frac{1}{2} x F(x)$ nach (Substitution und partielle Integration helfen). Folgern Sie, daß $F(x) e^{x^2/4}$ konstant ist.

Schöne Weihnachten und alles Gute für 2007

Für das Tutorium

Aufgabe 10.5 Untersuchen Sie die im Nullpunkt problematischen uneigentlichen Integrale der Funktion $\frac{1}{r^2} = \frac{1}{x^2+y^2}$ über das Quadrat, den Propeller und die Axtfläche (machen Sie sich Skizzen), die jeweils durch folgende Ungleichungen beschrieben werden:

$$Q: \ |x|, |y| \leq 1, \qquad P: \ |x| \leq 1, |y| \leq \frac{1}{4}|x|, \qquad A: \ |x| \leq 1, |y| \leq x^2.$$

Entschieden werden soll nur die Konvergenz. Das Ausrechnen der Integrale wäre viel schwieriger.

Hinweis: Da nicht ausgerechnet werden soll, kann man die Bedingung $|x|, |y| \leq 1$ genausogut durch $x^2 + y^2 \leq 1$ ersetzen. Das erlaubt bei Q und P Polarkoordinaten zu benutzen. Für A ist das jedoch nicht günstig.

Aufgabe 10.6 Zeigen Sie unter Benutzung von $\int_0^\infty \sin(t^2)\ dt = \int_0^\infty \cos(t^2)\ dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}$ (das werden wir im nächsten Semester beweisen), daß

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{Q_n} \sin(x^2+y^2)\ d(x,y) = \pi, \qquad \text{wobei} \qquad Q_n = [-n,n] \times [-n,n].$$

Andererseits ist

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{K_n} \sin(x^2+y^2)\ d(x,y) = 0, \qquad \text{wobei} \qquad K_n = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq 2\pi n\}.$$

Für Funktionen, die das Vorzeichen wechseln, käme es also bei der 'naiven' Berechnung uneigentlicher Integrale sehr wohl darauf an, welche Gestalt die immer größer werdenden Mengen haben, mit denen man die Integrationsgebiete ausschöpft.

Aufgabe 10.7 (Nachtrag zu 4.2.5) Zeigen Sie, daß die beiden Integrale

$$\int_1^\infty \frac{t-x}{(t+x)^3}\ dt \quad \text{für } x \in [1,\infty[\qquad\qquad \int_1^\infty \frac{t-x}{(t+x)^3}\ dx \quad \text{für } t \in [1,\infty[$$

gleichmäßig konvergieren. Berechnen Sie

$$\int_1^\infty \int_1^\infty \frac{t-x}{(t+x)^3}\ dt\ dx \qquad \text{und} \qquad \int_1^\infty \int_1^\infty \frac{t-x}{(t+x)^3}\ dx\ dt$$

11 Aufgaben zur Mathematikvorlesung für Physiker III

Zur Abgabe am 17. Januar 2007 in der Vorlesungspause

Aufgabe 11.1 Es sei S_t die Sphäre $x^2 + y^2 + z^2 = t^2$ vom Radius t und das Skalarfeld

$$f(x,y,z) = \begin{cases} x^2 + y^2, & \sqrt{x^2+y^2} \leq z \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Berechnen Sie $F(t) = \iint_{S_t} f \; dS$.
Hinweis: Die Funktion ist nur auf einer oberen 'Polkappe' von Null verschieden; also braucht auch nur über diese integriert zu werden. Überlegen Sie, welchen Öffnungswinkel diese Polkappe hat. Den Verzerrungsfaktor können Sie aus der Vorlesung übernehmen.

Aufgabe 11.2 (a) Berechnen Sie den Fluß des Vektorfeldes $\vec{f}(x,y,z) = \begin{pmatrix} xy^2 \\ x^2y \\ 0 \end{pmatrix}$ durch die Oberfläche des Zylinders vom Radius 2, dessen Achse mit der z-Achse übereinstimmt und der von den Ebenen $z = 0$ und $z = 3$ begrenzt wird.

(b) Berechnen Sie auch das Divergenzintegral über das Innere des Zylinders und bestätigen Sie (hoffentlich!) die Aussage des Gaussschen Integralsatzes.

Aufgabe 11.3 $\bar{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2) : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ sei eine Kurve in der rechten x,y-Halbebene (d.h. $\gamma_1(t) \geq 0$ für alle t). Läßt man diese um die y-Achse rotieren, so entsteht eine Oberfläche im (x,y,z)-Raum $\mathbb{R}^3$. Geben Sie eine Parametrisierung dieser Fläche an und weisen Sie mit ihrer Hilfe nach, daß ihr Flächeninhalt sich als

$$2\pi \int_{\bar{\gamma}} x \, ds$$

berechnen läßt. (Für das Kurvenintegral vgl. Skript Abschnitt 2.4, besonders 2.4.2)

Aufgabe 11.4 In der x,y-Ebene ist die sogenannte Herzkurve (Cardioide) in Polarkordinaten durch die Gleichung $r = 1 - \sin\varphi$ gegeben. (Skizze!)
Durch Drehung um die y-Achse entsteht daraus eine apfelförmige Oberfläche, deren Flächeninhalt sie berechnen sollen. Wenden Sie die dazu die vorige Aufgabe an.

Klausurtetmin 24. 1. nicht vergessen!

Für das Tutorium

Aufgabe 11.5 Berechnen Sie das Oberflächenintegral $\iint_\Gamma z d\Gamma$, wobei Γ eine Windung der Wendelfläche ist, die durch

$$x = u\cos v, \quad y = u\sin v, \quad z = v \qquad \text{mit} \quad 0 < u < a \text{ und } 0 < v < 2\pi$$

parametrisiert wird.

Aufgabe 11.6 Berechnen Sie den Fluß des Vektorfeldes $\begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \\ z^2 \end{pmatrix}$ durch die Sphäre mit Mittelpunkt (a, b, c) und Radius R in Richtung der äußeren Normalen.
Überprüfen Sie die Wahrheit des GAUSSschen Integralsatzes, indem Sie auch $\iiint_K div\ d(x, y, z)$ ausrechnen. (Letzteres geht natürlich viel schneller.)

Aufgabe 11.7 Für ein positives t sei $K(t)$ die Vollkugel und $S(t)$ die Sphäre vom Radius t, beide mit Mittelpunkt im Koordinatenursprung. Zeigen Sie, daß für jede stetige Funktion $f(x, y, z)$ die Ableitung des Volumenintegrals über $K(t)$ gleich dem Oberflächenintegral über $S(t)$ ist

$$\frac{d}{dt} \iiint_{K(t)} f(x, y, z)\ d(x, y, z) = \iint_{S(t)} f(x, y, z)\, dS$$

Speziell hängen Volumen und Oberfläche der Kugel vom Radius t auf diese Weise voneinander ab: $\frac{d}{dt}\frac{4}{3}\pi t^3 = 4\pi t^2$.

Aufgabe 11.8 Wir betrachten das Vektorfeld $\vec{f}(x, y, z) = \begin{pmatrix} z \\ 1 \\ z \end{pmatrix}$ und Γ, den im ersten Oktanten $(x, y, z \geq 0)$ gelegenen Teil der Einheitssphäre. Weiter sei γ die aus drei Viertelkreisen zusammengesetzte Randkurve von Γ Berechnen Sie beide Seiten der STOKESschen Formel

$$\iint_\Gamma \langle \vec{rot} \vec{f}, \vec{n} \rangle\ d\Gamma = \oint_\gamma \langle \vec{f}, d\vec{x} \rangle.$$

Was die Rotation betrifft, vertraue ich hier auf Ihre physikalischen Vorkenntnisse.

12 Aufgaben zur Mathematikvorlesung für Physiker III

Wegen Klausur keine Abgabe

Alle Lösungen unter dem Vorbehalt, daß ich mich verrechnet haben kann.

Aufgabe 12.1 Berechnen Sie

$$\oint xy^2dy - x^2ydx,$$

wobei über den Kreis $x^2 + y^2 = a^2$ integriert wird. Benutzen Sie die GREENsche Formel.

Aufgabe 12.2 In Aufgabe 3.1 wurde der Umfang der sogenannten Astroide, d.h. der Kurve mit der Gleichung

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$$

berechnet ($a > 0$ ein Parameter). Jetzt soll es der Inhalt der von dieser Kurve berandeten Fläche sein. Benutzen Sie die GREENsche Formel und die Parametrisierung $x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t$.

Aufgabe 12.3 Es sei $\bar{\gamma}$ eine richtigherum orientierte geschlossene Kurve, die das ebene Gebiet G berandet. Verwandeln Sie das Kurvenintegral

$$\oint_{\bar{\gamma}} \sqrt{x^2 + y^2}\; dx + y[xy + \log(x + \sqrt{x^2 + y^2})]\; dy$$

mit Hilfe der GREENschen Formel in ein Flächenintegral über G.

Aufgabe 12.4 Berechnen Sie

$$\oint_{\bar{\gamma}} \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2}$$

wobei die geschlossenen stückweise glatte Kurve $\bar{\gamma}$ nicht durch den Koordinatenursprung geht und ein Gebiet G umrandet.
Unterscheiden Sie zwei Fälle, je nachdem, ob der Koordinatenursprung innerhalb des umrundeten Gebietes liegt oder nicht.

Aufgabe 12.5 Betrachtet wird die 'parabolische Haube'

$$P = \{(x, y, z) :\; z = 2 - x^2 - y^2;\; x^2 + y^2 \le 1\}$$

und das darauf definierte Vektorfeld $\vec{f}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2 \\ x \\ y^2 \end{pmatrix}$.
Prüfen Sie die Gültigkeit des STOKESschen Satzes, indem Sie beide Seiten von

$$\iint_P \langle \vec{\text{rot}}\, \vec{f}, \vec{n}\rangle\; dP = \oint_{\bar{\gamma}} \langle \vec{f}, d\vec{x}\rangle$$

ausrechnen ($\vec{n}$ soll in positive z-Richtung zeigen).

13 Aufgaben zur Mathematikvorlesung für Physiker III

Zur Abgabe am 7. Februar 2007 in der Vorlesungspause

Aufgabe 13.1 Nachrechnen: Ist $\vec{f}$ ein wirbelfreies Vektorfeld, so ist $\vec{f} \times \vec{r}$ quellenfrei.

Aufgabe 13.2 Angenommen $\vec{f}$ ist sowohl quellen- als auch wirbelfrei und $\vec{a}$ ein fester Vektor. Rechnen Sie nach, daß $\vec{\text{rot}}\,(\vec{f} \times \vec{a}) = \vec{\text{grad}}\,\langle \vec{f}, \vec{a} \rangle$ gilt.

Aufgabe 13.3 Überzeugen Sie sich, daß das im ersten Oktanten $(x, y, z > 0)$ definierte Vektorfeld

$$\vec{f}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2(y+z)^{-\frac{1}{2}} \\ -x \cdot (y+z)^{-\frac{3}{2}} \\ -x \cdot (y+z)^{-\frac{3}{2}} \end{pmatrix}$$

ein Potentialfeld ist und finden Sie das Integral $\int_{\bar{\gamma}} \langle \vec{f}, d\vec{x} \rangle$ für eine (alle) Kurven $\bar{\gamma}$, welche die Punkte $(1, 1, 3)$ und $(2, 4, 5)$ verbinden.

Aufgabe 13.4 Es sei $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Entscheiden Sie mit Hilfe der Integrabilitätsbedingungen, ob das radiale Vektorfeld $\vec{g}(x, y, z) = f(r)\vec{r}$ ein Potentialfeld ist. Wenden Sie die in 6.3.6 gegebene Methode an um ein Potential zu finden.
Liefert die gefundene Formel auch dann ein Potential, wenn f nur stetig ist? Oder sogar für beliebige Funktionen f?

Für das Tutorium

Aufgabe 13.5 Wenn sich ein starrer Körper mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\vec{w}$ um eine Achse durch den Koordinatenursprung dreht, hat der Punkt mit Radiusvektor $\vec{r}$ die Geschwindigkeit $\vec{v} = \vec{w} \times \vec{r}$.

(a) weisen Sie das Geschwindigkeitsfeld als quellenfrei nach.

(b) Berechnen Sie seine Rotation. (Die 2 ist ein Schönheitsfehler; die Aufgabe erläutern noch einmal, warum man $\vec{\text{rot}}$ Rotation nennt.)

Aufgabe 13.6 Finden Sie eine Formel für $\text{div}(\vec{f} \times \vec{g})$.

Aufgabe 13.7 f sei eine beliebig oft differenzierbare Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\vec{a}$ ein fester Vektor und $r(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Berechnen Sie $\Delta f(r)$, $\vec{\text{rot}}\,(f(r)\vec{a})$ und $\text{div}(f(r)\vec{a})$.

Aufgabe 13.8 $\vec{f} = \vec{\text{grad}}\, p$ und $\vec{g} = \vec{\text{grad}}\, q$ seien auf ganz $\mathbb{R}^3$ definierte C^1-Potentialfelder. Zeigen Sie, daß

(a) dann auch $q\vec{f} + p\vec{g}$ ein Potentialfeld ist.

(b) $\vec{f} \times \vec{g}$ ein Vektorpotential hat.

In beiden Fällen kann man ein (Vektor)potential angeben. Auf die richtige Spur für Teil (b) kommt man aber, wenn man für (a) die Bedingung $\vec{\text{rot}} = \vec{0}$ prüft.