8. Übung zur Vorlesung „Mathematik für Physiker I“ Freiwillige Weihnachtsaufgaben

Wintersemester 2005/06

Prof. Dr. Robert Fittler
Anja Krech

Ausgabe: 12.12.05
Abgabe: 04.01.06

Mit diesem Zettel können Sie zusätzlich Punkte sammeln: Wählen Sie sich aus den fünf Aufgaben zwei Aufgaben aus, die sie bearbeiten möchten. Wir werden diese zwei Aufgaben korrigieren. Wie immer gibt es vier Punkte pro Aufgabe, sie können also zusätzlich maximal acht Punkte mit diesem Zettel erhalten.

Aufgabe 1

(a) Beweisen Sie das *Reihenverdichtungskriterium*:
Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge nichtnegativer reeller Zahlen mit

$$a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq \ldots .$$

Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ genau dann konvergiert, wenn $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ konvergiert.

(b) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ konvergiert.

Aufgabe 2

Berechnen Sie den Grenzwert der Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^s} \qquad \text{und} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}$$

für $s = 2$ und $s = 4$. Dabei werde als bekannt vorausgesetzt, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \qquad \text{und} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

gilt.

Aufgabe 3

Beweisen Sie mit Hilfe des Wurzelkriteriums die Formel für den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$:

$$R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Bitte wenden!

Aufgabe 4

Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen mit $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und es existiere der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Zeigen Sie mit Hilfe des Quotientenkriteriums, dass dann für den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ gilt:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|.$$

Aufgabe 5

Berechnen Sie den Konvergenzradius folgender Potenzreihen:

(a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{n^n} x^n$,

(b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!} x^n$,

(c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} x^n$,

(d) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(4+(-1)^n)^{3n}}$.