6. Übung zur Vorlesung „Mathematik für Physiker I"

Wintersemester 2005/06

Prof. Dr. Robert Fittler
Anja Krech

Ausgabe: 28.11.05
Abgabe: 7.12.05

Aufgabe 1

Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

(a) Zeigen Sie, dass dann auch die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Mittelwerte, $b_n = \frac{1}{n}(a_1 + \cdots + a_n)$, gegen a konvergiert. Benutzen Sie dazu die Grenzwertdefinition.

(b) Zeigen Sie an einem geeigneten Gegenbeispiel, dass die Umkehrung nicht immer gilt.

Aufgabe 2

Berechnen Sie die Grenzwerte der folgenden Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

(a) $a_n = \sqrt{n+3} - \sqrt{n}$,

(b) $a_n = \left(\frac{2\cdot 10^n+1}{3\cdot 10^n+5}\right)^{1/2}$,

(c) $a_n = \sum\limits_{k=0}^{n} 2^{-k}$,

(d) $a_n = \frac{1}{n^2}\sum\limits_{k=1}^{n} k$,

(e) $a_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$,

(f) $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^3+k}$.

Hinweis: Für (f) dürfen Sie die Formel $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$ benutzen.

Aufgabe 3

Seien a und b reelle Zahlen. Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei wie folgt rekursiv definiert:

$$a_0 := a, \quad a_1 := b, \quad a_n := \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n-2}) \quad \text{für } n \geq 2.$$

Beweisen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und bestimmen Sie ihren Grenzwert.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst: $a_{k+1} - a_k = (-\frac{1}{2})^k(b-a)$ für alle $k \geq 1$.