5. Übung zur Vorlesung
„Mathematik für Physiker I“

Wintersemester 2005/06

Prof. Dr. Robert Fittler
Anja Krech

Ausgabe: 21.11.05
Abgabe: 30.11.05

Aufgabe 1

Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen reeller Zahlen mit $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie:

(a) $\lim_{n\to\infty} a_n + b_n = \infty$

(b) Ist $b > 0$, so gilt $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \infty$. Ist $b < 0$, so gilt $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = -\infty$.

Aufgabe 2

Geben Sie Beispiele reeller Zahlfolgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ an, so dass folgende Fälle eintreten:

(a) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \infty$.

(b) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = -\infty$.

(c) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = c$, wobei c eine beliebig vorgegebene reelle Zahl ist.

(d) Die Folge $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt, aber nicht konvergent.

Aufgabe 3

Die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seien definiert durch:

$$a_n := \frac{(3-n)^3}{3n^3-1} \qquad \text{und} \qquad b_n := \frac{1+(-1)^n n^2}{2+3n+n^2} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Entscheiden Sie bei beiden Folgen, welche der drei Eigenschaften „beschränkt“, „konvergent“ bzw. „divergent“ vorliegen. Begründen Sie ihre Entscheidung! Bestimmen Sie im Fall der Konvergenz den Grenzwert.