3. Übung zur Vorlesung „Mathematik für Physiker I“

Wintersemester 2005/06

Prof. Dr. Robert Fittler
Anja Krech

Ausgabe: 7.11.05
Abgabe: 16.11.05

Aufgabe 1

Beweisen Sie folgende Eigenschaften der Binomialkoeffizienten:

(a) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \qquad n, k \in \mathbb{N},\ 0 \leq k \leq n$

(b) $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n \qquad n \in \mathbb{N}$

(c) $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0 \qquad n \in \mathbb{N}$

Aufgabe 2

Zeigen Sie mit Hilfe des binomischen Satzes:

$$(1+x)^n \geq \frac{n^2}{4} x^2 \qquad \text{für } x > 0, n \geq 2$$

Aufgabe 3

Beweisen Sie durch vollständige Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$:

(a) $\sum\limits_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1$

(b) $\frac{1}{133}(11^{n+1} + 12^{2n-1}) \in \mathbb{N}$

Aufgabe 4

Beweisen Sie für alle positiven reellen Zahlen a, b, c, d :

(a) $\frac{a}{\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{a}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

(b) $\sqrt{(a+b)(c+d)} \geq \sqrt{ac} + \sqrt{bd}$

Hinweis: Benutzen Sie die Monotonie der Wurzelfunktion ($0 < x < y \Rightarrow \sqrt{x} < \sqrt{y}$). Für Teil (b) können Sie die Ungleichung $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$ für $x, y \geq 0$ benutzen.