

1 Blatt - Festkörperphysik 2 - Vakuum

1.1 (Mittlere Geschwindigkeit eines Moleküls)

Aus der kinetischen Gastheorie folgt für die mittlere Geschwindigkeit eines Teilchens:

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m}} \approx 5.929 \cdot 10^{-12} \sqrt{\frac{T [\text{K}]}{m [\text{kg}]}} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

bei Raumtemperatur $T = 300 \text{ K}$ folgt damit für die gegebenen Moleküle:

$$\begin{aligned} \langle v \rangle_{H_2} &= 1782 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ \langle v \rangle_{N_2} &= 476.3 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{aligned}$$

1.2 (Auftreffrate)

Es ist die Auftreffrate $r = \frac{N_{Hit}}{A \cdot t}$ (Zahl der Teilchen pro Zeit und Flächeneinheit) zu bestimmen. Die mittlere Geschwindigkeit der Gasteilchen sei für ein stark verdünntes Gas mit $n = \frac{N}{V}$ Teilchen pro Volumeneinheit gegeben mit:

$$\bar{v} = \frac{1}{n} \int f(v) v d^3v$$

Es ist zu zeigen, dass sich die Auftreffrate dann zu

$$r = \frac{1}{4} n \bar{v}$$

ergibt. Die Maxwell-Boltzmann-Verteilung ist gegeben mit:

$$f(v) = \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{\frac{3}{2}} \exp \left(-\frac{mv^2}{2k_B T} \right)$$

Es ist zu erwarten, dass im Mittel circa die Hälfte der Teilchen auf die Wand zu und die andere Hälfte weg von ihr fliegen wird (die Teilchen, die weg fliegen, werden egal, wie groß t ist nicht mehr auf diese treffen). Ein zu vernachlässigender Anteil wird parallel fliegen. Betrachten wir jetzt eine feste Fläche und Zeit. Es ist zu erwarten, dass Teilchen aus einem bestimmten Volumenbereich dann die Möglichkeit besitzen mit der Wand zu stoßen. Wählen wir das Koordinatensystem so, dass unsere Teilchen in z -Richtung auf eine Fläche in der xy -Ebene zu fliegen. Dann ist für uns relevant, wie groß die mittlere Geschwindigkeit in z -Richtung ist, da sie für die Anzahl der Teilchen, die die Fläche erreichen können, bestimmend ist. Nur Teilchen mit einem Abstand von $\langle v_z \rangle t \leq s$, wobei s den z -Abstand zwischen Teilchen und Wand darstellt, werden die Wand erreichen. Die x - und y -Komponenten sind nicht relevant, da im Mittel (thermisches Gleichgewicht) genauso viele Teilchen in den Volumenbereich über der Fläche hinein, wie hinausfliegen werden. Somit können wir die Teilchenanzahl, die auftrifft über die Anzahl an Teilchen, die sich in dem Volumenbereich über der Fläche befindet definieren:

$$N_{Hit} = n V_{Hit} = n \langle v_z \rangle t A$$

Die mittlere Geschwindigkeit in z -Richtung ergibt sich mit Hilfe von

$$\langle v_z \rangle = \frac{1}{n} \int f(v) v_z d^3v$$

wobei wir jetzt Maxwell-Boltzmann einsetzen können. Zusätzlich beachten wir die bereits oben erwähnte Tatsache, dass nur die Hälfte der Teilchen auf die Wand zu fliegt, d.h. wir integrieren über den Halbraum, wobei wir nur über den halben Azimutalwinkel integrieren (da wir die z -Achse betrachten). Dies liefert also mit $v_z = v \cos \theta$ und Kugelkoordinaten:

$$\langle v_z \rangle = \frac{1}{n} \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{\frac{3}{2}} \int_0^\infty dv \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta v^3 \cos \theta \sin \theta \exp \left(-\frac{mv^2}{2k_B T} \right)$$

mit den Integralen:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \cos \theta \sin \theta = [\sin^2 \theta]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \cos \theta \sin \theta \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \cos \theta \sin \theta = \frac{1}{2} [\sin^2 \theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi$$

dies führt auf:

$$\langle v_z \rangle = \frac{1}{2} \frac{1}{n} \int_0^\infty dv 2\pi v^3 \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{\frac{3}{2}} \exp \left(-\frac{mv^2}{2k_B T} \right) = \frac{1}{4} \frac{1}{n} \int_0^\infty dv 4\pi v^3 \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{\frac{3}{2}} \exp \left(-\frac{mv^2}{2k_B T} \right)$$

Jetzt nutzen wir den Trick, dass

$$4\pi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin \theta$$

und somit:

$$\langle v_z \rangle = \frac{1}{4} \frac{1}{n} \int_0^\infty dv \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta v^2 \sin \theta \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{\frac{3}{2}} \exp \left(-\frac{mv^2}{2k_B T} \right) \cdot v$$

Transformation auf kartesische Koordinaten:

$$\langle v_z \rangle = \frac{1}{4} \frac{1}{n} \int d^3v \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{\frac{3}{2}} \exp \left(-\frac{mv^2}{2k_B T} \right) \cdot v$$

und einsetzen von $f(v)$ liefert:

$$\langle v_z \rangle = \frac{1}{4} \frac{1}{n} \int d^3v f(v) v$$

Nun müssen wir nur noch den Tipp aus der Aufgabenstellung nutzen und finden:

$$\langle v_z \rangle = \frac{1}{4} \bar{v}$$

Wir können das Ergebnis jetzt einsetzen:

$$N_{Hit} = n \langle v_z \rangle t A = \frac{1}{4} n \bar{v} t A$$

und erhalten zu guter Letzt:

$$r = \frac{N_{Hit}}{A \cdot t} = \frac{\frac{1}{4} n \bar{v} A t}{A t} = \frac{1}{4} n \bar{v}$$

□

1.3 (Druck in Kugel)

Wir betrachten ein kugelförmiges Volumen $V = \frac{4\pi}{3}r^3 = \frac{\pi}{6}d^3$ bei T_1 ($p_{T_1} = 0$) mit dem Durchmesser d . Auf der Oberfläche $A_O = 4\pi r^2 = \pi d^2$ sei eine Monolage von Atomen adsorbiert. Eine Erhöhung der Temperatur auf $T_2 = 300$ K (Raumtemperatur) führt zur vollständigen Desorption der Teilchen. Wir wollen den bei T_2 herrschenden Druck für einen Durchmesser von $d = 40$ cm = 0.4 m abschätzen. Zuerst schätzen wir die Anzahl der adsorbierten Moleküle ab, wobei die Flächendichte aus der Literatur mit $\rho_A = 10^{15} \frac{\text{mol}}{\text{cm}^2} = 10^{19} \frac{\text{mol}}{\text{m}^2}$ gegeben ist. Hieraus lässt sich die Zahl der Atome bestimmen, wobei wir davon ausgehen, dass die ganze Fläche besetzt ist und es keine freien Stellen gibt (der Fehler müsste kleiner als eine Größenordnung sein (vgl. Packungsarten wie hexagonal dichteste Packung etc.)). Hieraus folgt dann für die Atomanzahl:

$$N = \rho_A A_O = \rho_A d^2 \pi$$

Mit dieser Angabe können wir nun die allgemeine Gasgleichung benutzen (Näherung ideales Gas, alternativ andere Gasgleichungen z.B. Van der Waals Gasgleichung, etc.):

$$pV = Nk_B T$$

die sich umschreiben lässt zu:

$$p(d, T) = \frac{N(d)}{V(d)} k_B T = \frac{6\rho_A k_B T}{d}$$

wir wissen bereits, dass für einen bestimmten Durchmesser N und V konstant (und ungleich 0) sind (N, V unabhängig von T , wegen äußeren Randbedingungen [abgeschlossenes System + Volumen durch Kugel begrenzt]), d.h. unsere Temperatur T_1 muss somit 0 K sein, da $p_{T_1} = 0$ vorausgesetzt wurde. Setzen wir nun den Wert von $T_2 = 300$ K ein, erhalten wir:

$$p(d, T_2) = \frac{N(d)}{V(d)} k_B T_2 = \frac{6\rho_A k_B}{d} \cdot T_2 \approx \frac{0.25}{d[\text{m}]} \left[\frac{\text{kg}}{\text{s}^2} \right]$$

mit $1 \text{ Pa} = 1 \frac{\text{kg}}{\text{ms}^2}$ folgt also:

$$p(d, T_2) = \frac{0.25}{d} [\text{Pa}]$$

Hieraus ergibt sich durch einsetzen des gegebenen Durchmessers

$$p(0.4 \text{ m}, T_2) \approx 0.62 [\text{Pa}]$$