Heiko Dumlich 20. Januar 2007

11 Übungsblatt Festkörperphysik

11.1 (Zyklotron-Resonanz Messung)

Die Äqui-Energiefläche im Leitungsband von Germanium zeigt entlang der [111] -Richtung. Ihr sphäroidale Form kann im lokalen $x - y - z$-Koordinatensystem folgendermaßen beschrieben werden:

$$E\left(\vec{k}\right) = \hbar^2 \left(\frac{k_x^2 + k_y^2}{2m_t} + \frac{k_z^2}{2m_l}\right)$$

a)

Es ist mit Hilfe der Bewegungsgleichungsgleichung zu zeigen, dass für ein statisches Magnetfeld $\vec{B}$ in der lokalen $x - y$-Ebene die Zyklotronresonanz gegeben ist durch:

$$\omega_c = \frac{e\left|\vec{B}\right|}{\sqrt{m_l m_t}}.$$

Wir betrachten die Bewegungsgleichung:

$$\frac{d\vec{k}}{dt} = -\frac{e}{\hbar^2}\nabla_{\vec{k}} E\left(\vec{k}\right) \times \vec{B}$$

Einsetzen von $E\left(\vec{k}\right)$ und $\vec{B} = (B_x, B_y, 0)$ liefert:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix} = -\frac{e}{\hbar^2}\begin{pmatrix} \frac{\hbar^2}{m_t}k_x \\ \frac{\hbar^2}{m_t}k_y \\ \frac{\hbar^2}{m_l}k_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ 0 \end{pmatrix}$$

das Kreuzprodukt liefert also:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{e}{m_t}k_x \\ -\frac{e}{m_t}k_y \\ -\frac{e}{m_l}k_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{e}{m_l}k_z B_y \\ -\frac{e}{m_l}k_z B_x \\ \frac{e}{m_t}k_y B_x - \frac{e}{m_t}k_x B_y \end{pmatrix}$$

Wir können das Gleichungssystem lösen, hierzu leiten wir zuerst die z-Komponente nach t ab und erhalten:

$$\frac{d^2}{dt^2}k_z = \frac{e}{m_t}\frac{d}{dt}k_y B_x - \frac{e}{m_t}\frac{d}{dt}k_x B_y = -\frac{e^2}{m_t m_l}\left(B_x^2 + B_y^2\right)k_z = -\frac{e^2\left|\vec{B}\right|^2}{m_t m_l}k_z$$

mit $\frac{e^2\left|\vec{B}\right|^2}{m_t m_l} = \omega_c^2$, bzw. $\omega_c = \frac{e\left|\vec{B}\right|}{\sqrt{m_l m_t}}$ folgt:

$$\frac{d^2}{dt^2}k_z = -\omega_c^2 k_z.$$

Dies ist eine triviale DGL mit der Lösung $k_z = e^{i\omega_c t}$. Wir können schnell noch die x- und y-Komponente prüfen, indem wir diese auch nach t ableiten und dann $\frac{d}{dt}k_z$ einsetzen, bzw.

$$\frac{\frac{d}{dt}k_x}{\frac{d}{dt}k_y} = -\frac{B_y}{B_x} \Rightarrow k_x = -\frac{B_y}{B_x}k_y \Leftrightarrow k_y = -\frac{B_x}{B_y}k_x \tag{1}$$

ausnutzen. Es ergeben sich somit:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dt^2}k_x &= \frac{e}{m_l}\frac{d}{dt}k_z B_y = \frac{e^2}{m_l m_t}k_y B_x B_y - \frac{e^2}{m_l m_t}k_x B_y^2 \\
\frac{d^2}{dt^2}k_y &= -\frac{e}{m_l}\frac{d}{dt}k_z B_y = -\frac{e^2}{m_l m_t}k_y B_x B_y + \frac{e^2}{m_l m_t}k_x B_y^2
\end{aligned}$$

Einsetzen der Beziehung (1) liefert:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dt^2}k_x &= -\frac{e^2}{m_l m_t}k_x\left(B_x^2 + B_y^2\right) = -\omega_c^2 k_x \\
\frac{d^2}{dt^2}k_y &= -\frac{e^2}{m_l m_t}k_y\left(B_x^2 + B_y^2\right) = -\omega_c^2 k_y
\end{aligned}$$

Wir erhalten also die Beziehung:

$$\frac{d\vec{k}}{dt} = -\omega_c^2\vec{k}.$$

Somit ist die Zyklotronresonanz von $\omega_c = \frac{e\left|\vec{B}\right|}{\sqrt{m_l m_t}}$ für alle Komponenten gezeigt.

b)

Es sind aus der Messung (Folie 21 Blatt 4) die longitudinale Masse m_l und die transversale Masse m_t zu bestimmen. Wir betrachten die Formel für den Rotationsellipsoiden:

$$\frac{1}{m_c^2} = \frac{\cos^2\theta}{m_t^2} + \frac{\sin^2\theta}{m_l m_t}.$$

Wir wählen $\theta = 0°$ um hieraus:

$$m_c = m_t$$

zu erhalten, womit wir bereits die transversale Masse bestimmen können. Wir benötigen noch eine zweite Magnetfeldrichtung um die longitudinale Masse zu bestimmen, für diese wählen wir $\theta = \frac{\pi}{2}$, dies liefert:

$$m_c = \sqrt{m_l m_t}.$$

Wir wissen zudem, dass das Maximum uns die longitudinale Masse liefern wird und das Minimum die transversale Masse. Wir können also die Graphik betrachten und finden für das Minimum:

$$m_c = 0.081\, m = m_t.$$

Das Maximum finden wir bei:

$$m_c = 0.36\, m = \sqrt{m_l m_t}$$

wobei mit $m_t = 0.081m$ für m_l folgt:

$$m_l = \frac{m_c^2}{m_t} = 1.6\, m.$$

Das das Minimum bzw. Maximum global ist, kann man an der Graphik nicht sofort erkennen, jedoch kann man sich dies durch aufzeichnen klar machen und sieht dann, dass die Schnitte durch die Rotationsellipsoiden tatsächlich so schneiden, dass die beiden senkrechten Bahnen entstehen.

11.2 (Chemisches Potential)

Die effektive Masse m_e^* im Minimum des Leitungsbandes eines intrinsischen HL sei drei mal größer als die effektive Masse m_h^* von Löchern im Maximum des Valenzbandes, d.h. $m_e^* = 3m_h^*$. Die Bandlücke betrage $E_g = 0.6\, eV$. Es ist die Termperatur zu bestimmen, bei der das chemische Potential μ gerade $\frac{1}{3}E_g$ beträgt. Für den gegebenen Fall folgt für das chemische Potential von der oberen Valenzbandkante aus gemessen:

$$\mu\left(T\right) = \frac{1}{3}E_g = \frac{1}{2}E_g + \frac{3}{4}k_B T \ln\left(\frac{m_h^*}{m_e^*}\right).$$

Wir müssen nun nur noch nach T umstellen um die Temperatur zu bestimmen:

$$T = \frac{4}{3k_B \ln\left(\frac{m_h^*}{m_e^*}\right)}\left(\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right] E_g\right).$$

Einsetzen der expliziten Werte liefert:

$$T = \frac{4}{3\cdot\left(1.38\cdot 10^{-23}\right)\, \ln\left(\frac{1}{3}\right)}\left(-\frac{1}{6}\cdot 0.6\cdot 1.602\cdot 10^{-19}\right)\frac{VAs}{\frac{VAs}{K}}$$

Die Temperatur für $\mu\left(T\right) = \frac{1}{3}E_g$ beträgt somit also:

$$T = 1409\, K$$

11.3 (Dotierung von Halbleitern)

Es ist zu prüfen, wie stark die Leitfähigkeit von Silizium mit Phosphor-Dotierung ansteigt, wenn jedes 10^5-te Atom ein Fremdatom ist.

Für die Leitfähigkeit gilt:

$$\sigma = \mu n e$$

Wir wissen das die Beweglichkeit durch Dotierung geringer werden muss da Stöße mit den Fremdatomen stattfinden werden und wahrscheinlicher sind als Stöße mit den Wirtatomen, jedoch ist dieser Einfluss bei Raumtemperatur nicht sehr groß und beträgt maximal eine Größenordnung (dies jedoch auch erst für hohe Dotierungen von $> 10^{17}\,cm^{-3}$). Somit können wir das Verhältnis zwischen dotiertem Halbleiter und intrinsischen Halbleiter über die Propotionalität $\sigma \sim n$ folgendermaßen ausdrücken:

$$\frac{\sigma_d}{\sigma_i} = \frac{n_d}{n_i},$$

wobei der Index d die dotierten und i die intrinsischen Objekte beschreiben soll. Der Wert sollte im Bereich 10^3 liegen. Wir können aus der Ladungsneutralität der intrinsischen Halbleiter folgern:

$$n_i = \sqrt{N_{eff}^C N_{eff}^V} e^{-\frac{E_g}{2k_B T}},$$

wobei dies die intrinsische Ladungsträgerkonzentration angibt. Für die Konzentration im dotierten Halbleiter unterscheidet man die neutrale N_D^0 und angeregte Störstellendichte N_D^+, wobei diese zusammen die Dichte der Donatoren angibt:

$$N_D = N_D^0 + N_D^+.$$

Mit Raumtemperatur von ca. $295\,K$, folgt ca. eine mittlere kinetische Energie der Elektronen von $E = \frac{3}{2}k_B T = 25.4\,meV$. Das Donatorniveau liegt $E_d = 45\,meV = 7.21 \cdot 10^{-21}\,VAs$ unter dem Leitungsband. Somit werden nicht alle Elektronen die nötige Energie besitzen, um in das Leitungsband zu springen. Für die Dichte der neutralen Störstellen gilt die Beziehung

$$N_D^0 = N_D \frac{1}{\left(e^{\frac{E_D - \mu}{kT}} + 1\right)}.$$

Wir wissen, dass der Energiegap zwischen Leitungs- und Valenzband $E_g = 1.1\,eV = 1.76 \cdot 10^{-19}\,VAs$ beträgt, somit erhalten wir für $E_V = 0$, also vom Maximum des Valenzbandes aus gemessen für $E_D = (1.1 - 0.045)\ eV = 1.055\,eV = 1.69 \cdot 10^{-19}\,VAs$. Das chemische Potential ist gegeben mit:

$$\mu(T) = \frac{1}{2}E_g + \frac{3}{4}k_B T \ln\left(\frac{m_h^*}{m_e^*}\right) = 8.83 \cdot 10^{-20}\,VAs$$

wobei $m_h^* = 0.34\,m_e$ und $m_e^* = 0.32\,m_e$. Um N_D zu bestimmen, beachten wir, dass nur jedes 10^{-5} te Atom ein Fremdatom sein soll, daher können wir die Dichte der Silizium Atome berechnen und dann mit 10^{-5} multiplizieren, um die Dichte der Donatoren zu erhalten. Es ergibt sich:

$$N_D = \frac{8}{a^3}10^{-5} = 4.996783102 \cdot 10^{23}\,m^{-3}.$$

Hierbei haben wir die Einheitszelle betrachtet, die 8 Atome enthält und ein Volumen von a^3 besitzt. Wir können jetzt N_D^0 bestimmen um danach die angeregte Störstellendichte zu erhalten. Es folgt:

$$N_D^0 = 4.996783091 \cdot 10^{23} m^{-3}.$$

Somit folgt also für $N_D^+ = N_D - N_D^0$:

$$N_D^+ = 1.12 \cdot 10^{15} m^{-3}.$$

Nehmen wir an, dass nur die angeregten Störstellen einen Einfluss auf die Leitfähigkeit üben, folgt $n_d = N_D^+$.

Es bleibt die Berechnung der intrinsischen Ladungsträgerdichte:

$$n_i = \sqrt{N_{eff}^C N_{eff}^V} e^{-\frac{E_g}{2k_B T}},$$

mit $N_{eff}^C = 2\left(\frac{m_e^* kT}{2\pi\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}}$ und $N_{eff}^V = 2\left(\frac{m_h^* kT}{2\pi\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}}$. Für diese folgt:

$$n_i = 5.93 \cdot 10^{14}\,m^{-3}.$$

Hieraus würde ein Verhältnis von:

$$\frac{\sigma_d}{\sigma_i} = \frac{n_d}{n_i} = 1.9$$

folgen. D.h. es würde nur ein Faktor 2 in der Leitfähigkeit gewonnen werden, was entgegen der Erwartung ist. Also betrachten wir den Fall $N_D^+ \gg n_i$, hierfür gilt dann die Näherungsformel:

$$n_d = 2N_D \frac{1}{1 + \sqrt{1 + 4\frac{N_D}{N_{eff}^C} e^{\frac{E_d}{kT}}}}.$$

Setzen wir in diese ein, erhalten wir:

$$n_d = 3.43 \cdot 10^{23}\,m^{-3}.$$

Hieraus würde ein Verhältnis von:

$$\frac{\sigma_d}{\sigma_i} = 5.8 \cdot 10^8$$

folgen was auch der Erwartung widerspricht und zu groß erscheint. (Rechnungen zu finden im mathematica printout im Anhang)

11.4 (Ionisation von Donatoren)

Wir betrachten einen n-dotierten Halbleiter mit einer Donator-Konzentration von $N_D = 10^{13} cm^{-3}$. Das Donatorniveau befindet sich $E_d = 1\, meV$ unterhalb des Leitungsbandminimums E_C und die effektive Masse der Elektronen sei $m_e^* = 0.01\, m_e$.

a)

Es ist zu zeigen, dass der Halbleiter bei $T = 4K$ im Bereich der Störstellenreserve liegt.

Dies können wir durch einsetzen der Werte zeigen, wobei um in der Störstellenreserve zu liegen der Halbleiter folgende Beziehung erfüllen muss:

$$\eta = 4\frac{N_D}{N_{eff}^C} e^{\frac{E_d}{k_B T}} \gg 1$$

wobei $N_{eff}^c = 2\left(\frac{m_e^* k_B T}{2\pi\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}}$. Wir erhalten also, wenn wir die Angaben einsetzen:

$$\eta = 2N_D \left(\frac{2\pi\hbar^2}{m_e^* k_B T}\right)^{\frac{3}{2}} e^{\frac{E_d}{k_B T}} = 18.9 \gg 1$$

b)

Es ist die Leitungselektronen-Konzentration $n(T)$ bei $T = 4K$ zu berechnen, für diese folgt:

$$n(T) = \sqrt{N_D N_{eff}^C} e^{-\frac{E_d}{2kT}} = 4.60 \cdot 10^{18}\, m^{-3}$$

c)

Störstellenerschöpfung bedeutet, dass T so beschaffen ist, dass

$$4\frac{N_D}{N_{eff}^C} e^{\frac{E_d}{kT}} \ll 1$$

ist. Wir können also in Abhängigkeit von T plotten (siehe Anhang), wobei wir feststellen, dass dieser Fall nicht eintritt, sondern nur ein Wert der gegen $4\frac{N_D}{N_C} = 1.04$ strebt erhalten werden kann, dies liegt daran, dass die e-Funktion einen positiven Exponenten besitzt, da $T > 0$ vorrausgesetzt werden muss und somit dieser Term maximal für $T \to \infty$ gegen 1 streben kann, wobei somit der Vorfaktor verhindert, dass die Störstellenerschöpfung erreicht werden kann. Physikalisch scheint dies im ersten Moment nicht sinnvoll, da man erwartet, dass wenn man genügend Energie in einen Körper steckt auch alle Elektronen die nötige Energie für einen Sprung ins Leitungsband besitzen werden. Zudem steckt in diesem Modell keine Annahme zur Zersetzung des Körpers, der die Sprünge unmöglich machen würde. Unser eigentliches Problem besteht also darin, dass der Vorfaktor $\frac{N^D}{N_{eff}^C}$ größer als 1 ist.