8. Übung (Abgabe Di. 19. Dezember zu Beginn der Übung bzw. Vorlesung)

---

30. Temperaturabhängigkeit des chemischen Potentials

Zeigen Sie, dass das chemische Potential eines zweidimensionalen Elektronengases gegeben ist durch: $\mu(T) = k_B T \ln(2e^{\frac{\pi n \hbar^2}{m k_B T}} - 1)$, wobei *n* die (Flächen)-Dichte der Elektronen beschreibt.

Hinweis: *Zeigen Sie zunächst, dass die Zustandsdichte gegeben ist durch:* $D(E) = L^2 m / (\pi \hbar^2)$ *mit* L^2 *= Fläche des Elektronengases. Das chemische Potential ist nun so zu definieren, dass die Anzahl Zustände integriert bis zu* $E = \mu(T)$ *immer der gesamten Anzahl Elektronen* N *entspricht. Die Anzahl Zustände erhält man durch Integration über die Dichte der Zustände.*

(3 Punkte)

31. Landau-Niveaus

Im statischen Magnetfeld spaltet die Energie E(k) der freien Elektronen auf in diskrete, äquidistante Niveaus: die Landau-Niveaus. Um dieses Verhalten zu verstehen, betrachten wir das Vektorpotential eines homogenen Magnetfelds $\vec{B} = B\vec{e}_z$ ist $\vec{A} = -By\vec{e}_x$. Der Hamiltonoperator eines freien Elektrons ohne Spin lautet dann: $H = [\vec{p} + e\vec{A}]^2 / (2m)$. Die Eigenfunktion soll die folgende Form haben: $\psi = \chi(y)\, e^{i(k_x x + k_z z)}$.

(a) Zeigen Sie, dass $\chi(y)$ der folgenden Differentialgleichung genügt:

$$\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\chi}{dy^2} + \left[E - \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m} - \frac{1}{2} m\omega_c^2 (y - y_0)^2\right]\chi = 0, \quad y_0 = -\frac{\hbar k_x}{eB}, \quad \omega_c = \frac{eB}{m}$$

(b) Zeigen Sie, dass dies die Differentialgleichung für einen harmonischen Oszillator ist mit Eigenwerten $E_n = (n + 1/2)\hbar\omega_c + \hbar^2 k_z^2 / (2m)$.

Hinweis: *Für Aufgabe (b) genügt es zu zeigen, dass die Differentialgleichung in (a) der Schrödinger-Gleichung eines harmonischen Oszillators entspricht.*

(3 Punkte)

32. Energielücke in eindimensionalen periodischen Strukturen

Wir betrachten freie Elektronen in einem eindimensionalen, linearen Gitter (Gitterkonstante *a*). Elektronen mit Wellenvektor auf dem Rand der ersten Brillouin-Zone erfahren eine Bragg-Reflexion, so dass sich stehende Wellen $\psi_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{i\frac{\pi x}{a}} \pm e^{-i\frac{\pi x}{a}}\right)$ für $k = \pm\frac{\pi}{a}$ bilden. Aufgrund der unterschiedlichen Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte haben die beiden Wellenfunktionen in einem periodischen Kristallpotential der Form: $U(x) = U_0 \cos(2\pi x / a)$ nicht mehr dieselbe Energie, so dass an dieser Stelle des *k*-Raums die Energieentartung aufgehoben wird und eine Energielücke entsteht: $E \rightarrow E_\pm$. Zeigen Sie, dass die Größe der Energieaufspaltung $\Delta E = E_+ - E_-$ gleich der Fourier-Komponente des Kristallpotentials $U(x)$ ist.

Hinweis: *Die Energie ist der Erwartungswert von H:* $E_\pm = \langle \psi_\pm^* | H | \psi_\pm \rangle = \int dx\, \psi_\pm^* H \psi_\pm$.

(3 Punkte)