Abgabe: 29.11.2007

Übungen zu „Kern- und Teilchenphysik I"

(M.P. Heyn, H.-E. Mahnke, R. Püttner)

Übung 6:

Aufgabe 18:

Bei der Berechnung der Baryon- und Meson-Massen und des Singulett/Triplett-Energieunterschieds in Charmonium (alles in L = 0-Zustände) hatten wir für die magnetischen Wechselwirkungen nur den Fermi-Kontatkt-Term verwendet und scheinbar die übliche $1/r^3$-abhängige Dipol-Dipol-Wechselwirkung weggelassen. Der Erwartungswert dieses Beitrags ist aber für L = 0-Zustände null, was zu beweisen ist. Hierzu sind $\vec{A}$ und $\vec{B}$ zwei feste Vektoren an den Orten $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$. Zeigen Sie, dass der Erwartungswert von

$$Q \equiv 3\left(\vec{A}\cdot\hat{r}\right)\ \left(\vec{B}\cdot\hat{r}\right) - \vec{A}\cdot\vec{B}$$

in jedem kugelsymmetrischen Zustand null ist. $\hat{r}$ ist ein Einheitsvektor in Richtung von $\vec{r}_1$ nach $\vec{r}_2$. Hinweis: überzeugen Sie sich zunächst, dass der Erwartungswert sich als

$$\langle Q\rangle \equiv \alpha\ \ \vec{A}\cdot\vec{B}$$

schreiben lässt, wobei α eine von $\vec{A}$ und $\vec{B}$ unabhängige Konstante ist. Um α zu berechnen, wählen Sie eine geeignete Geometrie für $\vec{A}$ und $\vec{B}$ und führen Sie die Winkelintegration durch.

(4 Punkte)

Aufgabe 19:

Das Lambda-Teilchen $\left(J^P = \frac{1}{2}^+\right)$ ist ein Isospin-Singulett. Überprüfen Sie, dass die Spin-Flavourwellenfunktion des Λ° im Spin-up Zustand lautet:

$$\left|\Lambda^\circ : \frac{1}{2}\frac{1}{2}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{12}}\{zykl\ \ (u(\uparrow)\ d(\downarrow)\ s(\uparrow))\ -\ zykl\ \ (u(\downarrow)\ d(\uparrow)\ s(\uparrow))$$
$$+\ zykl\ \ (d(\downarrow)\ u(\uparrow)\ s(\uparrow))\ -\ zykl\ \ (d(\uparrow)\ u(\downarrow)\ s(\uparrow))\}$$

„*zykl*" bedeutet zyklisch vertauschen:

$$zykl\ \ (|a\ \ b\ \ c\rangle) \equiv |a\ \ b\ \ c\rangle + |b\ \ c\ \ a\rangle + |c\ \ a\ \ b\rangle$$

Weisen Sie zuerst nach, dass diese Wellenfunktion total symmetrisch ist. Zeigen Sie dann durch Anwendung des Spinoperators $\hat{S}_Z$ und Isospinoperators $\hat{I}_3$, dass dieser Zustand tatsächlich S_Z = + ½ und I_3 = 0 besitzt. Weisen Sie dann durch Anwendung der Aufsteigeoperatoren S_+ und I_+ nach, dass die gefundenen Werte für S_Z und I_3 die maximal möglichen sind, und daher S = ½, I = 0 folgt. Berechnen Sie das magnetische Moment des Lambda-Teilchen.

(4 Punkte)

Aufgabe 20:

Positronium ist ein H-Atom-ähnlicher gebundener Zustand von e^+ und e^- (siehe Vorlesung). Positronium ist unstabil (Annihilation) und zerfällt elektromagnetisch in Photonen. Wie im He-Atom gibt es zwei Klassen von Energie-Niveaux, Parapositronium mit Spin 0 und Ortho-positronium mit Spin 1. Annihilation erfordert Overlap der Elektron- und Positron-Wellenfunktionen und findet deshalb nur in einem S-Zustand (ℓ = 0) statt. Beobachtet wird, dass $^1S_0$-Parapositronium in 2γ's und $^3S_1$-Orthopositronium in 3γ's mit einer Lebensdauer von 1.25×10^{-10}s, bzw. 1.42×10^{-7}s, zerfällt. Fermion-Antifermionzustände („fully neutral") können Eigenzustände von C bilden (siehe Vorlesung). Zeigen Sie, dass für ein Elektron-Positronsystem wie Positronium mit definierter Bahn (ℓ)- und Spin(s)-Drehimpuls gilt:

$$C = (-1)^{\ell+s}.$$

Zeigen Sie, dass auf Grund von C-Erhalt in der elektromagnetischen Wechselwirkung Parapositronium in 2 und Orthopositronium in 3γ's zerfällt.

(4 Punkte)

Aufgabe 21:

Zeigen Sie mittels der Massenformel für Mesonen, dass

$$\left(M_\rho - M_\pi\right) = \frac{m_s}{m_u}\left(M_{K^*} - M_K\right)$$

Setzen sie die gemessenen Mesonen-Massen ein und berechnen Sie m_s/m_u.

(3 Punkte)