Abgabe: 22.11.2007

Übungen zu „Kern- und Teilchenphysik I“

(M.P. Heyn, H.-E. Mahnke, R. Püttner)

Übung 5:

Aufgabe 14:

Das Spektrum der invarianten Masse von $\Lambda°$ und π^+ in der Reaktion

$$K^- + p \rightarrow \Lambda° + \pi^+ + \pi^-$$

zeigt einen Peak bei 1385 MeV mit Breite von 50 MeV. Die Resonanz wird Y_1* genannt. Die ($\Lambda°$ π^-) invariante Masse von der gleichen Reaktion zeigt einen ähnlichen Peak.

a) Bestimmen Sie aus diesen Daten die Seltsamkeit, Hyperladung und den Isospin von Y_1*. Zeigen Sie explizit, dass diese Daten mit der Ladung von Y_1* verträglich sind.

b) Die Daten zeigen, dass das Zerfallsprodukt $\Lambda°+\pi^+$ von Y_1* in einem p-Zustand des Bahndrehimpulses ist. Welche Spinzuordnungen J für Y_1* sind möglich? Was ist seine intrinsische Parität? (intrinsische Parität von $\Lambda°$ und π^+ sind +1 bzw. -1).

c) Welche andere starke Zerfallsmoden erwarten Sie für Y_1*? Warum ist der Zerfall von Y_1* nach $p + \overline{K}^0$ nicht möglich?

(3 Punkte)

Aufgabe 15:

Für das Pion-Nukleon System gibt es 6 Ladungszustände: π^+p, π^-p, π^0p, π^+n, π^-n, π^0n. Das Nukleon hat Isospin 1/2, das Pion Isospin 1. Aus diesen 6 Ladungszuständen können wir offenbar ein Isospin Quartett (I^{TOT} = 3/2, 4 Zustände) und ein Isospin Dublett (I^{TOT} = ½, 2 Zustände) bilden. Der Zustand mit $I^{TOT} = \frac{3}{2}$ und $I_3^{TOT} = \frac{3}{2}$, $\left|\frac{3}{2},\ \frac{3}{2}\right\rangle$, ist offenbar gleich $\left|\pi^+p\right\rangle$. $\left|\pi^+p\right\rangle$ ist das Produkt der Isospin Zustände von π^+ und p, $\left|\pi^+p\right\rangle = \left|1\ \ 1\right\rangle \left|\frac{1}{2}\ \ \frac{1}{2}\right\rangle$, wobei jeweils die erste Zahl der gesamten Isospin und die zweite Zahl I_3 darstellt. Offenbar gilt

$$\left|\frac{3}{2},\ \frac{3}{2}\right\rangle = \left|\pi^+p\right\rangle = \left|1\ \ 1\right\rangle \left|\frac{1}{2}\ \ \frac{1}{2}\right\rangle.$$

Zeigen Sie mit Hilfe der I_- Operatoren, ausgehend von $\left|\frac{3}{2},\ \frac{3}{2}\right\rangle$, dass für das Quartett und Dublett gilt:

$$\left|\frac{3}{2},\ \frac{3}{2}\right\rangle = \left|\pi^+ p\right\rangle$$

$$\left|\frac{3}{2},\ \frac{1}{2}\right\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}\ \left|\pi^+ n\right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}\ \left|\pi^0 p\right\rangle$$

$$\left|\frac{3}{2},\ -\frac{1}{2}\right\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}\ \left|\pi^- n\right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}\ \left|\pi^0 n\right\rangle$$

$$\left|\frac{3}{2},\ -\frac{3}{2}\right\rangle = \left|\pi^- n\right\rangle$$

$$\left|\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}\ \left|\pi^+ n\right\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}}\ \left|\pi^0 p\right\rangle$$

$$\left|\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}\ \left|\pi^0 n\right\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}\ \left|\pi^- p\right\rangle$$

Invertieren Sie diese 6 Gleichungen und schreiben Sie die 6 Pion-Nukleon-Ladungszustände als Linear-Kombinationen der 6 Isospin-Zustände $\left|I^{TOT},\ I_3^{TOT}\right\rangle$.

Da die starke Wechselwirkung Isospin invariant ist, haben von null-verschiedene Matrixelemente im Anfangs- und End-Zustand die gleiche I und I_3-Quantenzahlen. Außerdem besagt die Ladungsunabhängigkeit, dass die Matrixelemente nur von I^{TOT}, nicht aber von I_3^{TOT} (Ladung) abhängen. Wir wollen nun eine Voraussage über die Streuquerschnitte von π^- und π^+ Mesonen an Protonen machen.

Es gibt die drei Prozesse:

$$\pi^+ + p \quad \rightarrow \quad \pi^+ + p$$

$$\pi^- + p \quad \rightarrow \quad \pi^- + p$$

$$\pi^- + p \quad \rightarrow \quad \pi^0 + n$$

Zeigen Sie, dass aufgrund der Isospin-Invarianz

$$\left\langle \pi^+ p\right|\ \ H_S\ \left|\pi^+ p\right\rangle = M_{3/2}$$

$$\left\langle \pi^- p\right|\ \ H_S\ \left|\pi^- p\right\rangle = \frac{1}{3} M_{3/2} + \frac{2}{3} M_{1/2}$$

$$\left\langle \pi^- p\right|\ \ H_S\ \left|\pi^0 n\right\rangle = \frac{\sqrt{2}}{3} M_{3/2} - \frac{\sqrt{2}}{3} M_{1/2},$$

wobei

$$M_{3/2} \equiv \left\langle \frac{3}{2},\ I_3^{TOT} \right| \ H_s \ \left| \frac{3}{2},\ I_3^{TOT} \right\rangle,\ M_{1/2} \equiv \left\langle \frac{1}{2},\ I_3^{TOT} \right| \ H_s \ \left| \frac{1}{2},\ I_3^{TOT} \right\rangle$$

Zeigen Sie, dass deshalb für die Querschnitte bei gleicher Pion-Energie gilt:

$$\sigma_{\pi^+ p/\pi^+ p} : \sigma_{\pi^- p/\pi^- p} : \sigma_{\pi^- p/\pi^0 n} = 9 \left|M_{3/2}\right|^2 : \left|M_{3/2} + 2M_{1/2}\right|^2 : 2 \left|M_{3/2} - M_{1/2}\right|^2$$

Bei $W = 1232\ \mathrm{MeV/c^2}$ gibt es die berühmte Δ^{++}-Resonanz mit $I = 3/2$. Dort gilt $\left|M_{3/2}\right| >> \left|M_{1/2}\right|$.

Zeigen Sie, dass dort

$$\frac{\sigma_{TOT}(\pi^+ + p)}{\sigma_{TOT}(\pi^- + p)} = 3$$

und vergleichen Sie diese Voraussagen mit den experimentellen Daten (Vorlesung S. ET 80).

(5 Punkte)

Aufgabe 16:

Um ein Zyklotron stabil betrieben zu können, müssen Protonen, deren Bahn geringfügig von der idealen Kreisbahn abweichen, zurücktreibende Kräfte erfahren, damit ihre Bahnen um die Kreisbahn oszillieren (Betatron Oszillationen). Hierfür ist ein Magnetfeld mit geeignetem radialem Abfall notwendig.

Wir nehmen ein rotationssymmetrisches Feld an, das in der $z = 0$-Ebene die Form

$$\vec{B} = B_O \left(\frac{R}{r}\right)^n \vec{e}_z$$

hat. B_O ist das homogene Feld, das erforderlich ist, um die Teilchen auf einer Kreisbahn mit dem Radius R zu halten; n ist ein konstanter Exponent.

a) Berechnen Sie die Radialkomponente des Magnetfeldes außerhalb der $z = 0$-Ebene mit Hilfe von rot $\vec{B} = \vec{0}$. Benutzen Sie hierbei Zylinderkoordinaten.

b) Leiten Sie mit Hilfe der Newtonschen Gleichung in Zylinderkoordinaten die Bewegungsgleichung für Abweichungen von der idealen Kreisbahn in radialer und vertikaler Richtung her. Verwenden Sie $\delta = r - R$ für die radiale Abweichung von der Kreisbahn.

c) Für welche Werte von n führen die Teilchen in radialer und vertikaler Richtung stabile Oszillationen um die Kreisbahn durch?

Das erste, von Lawrence gebaute, Zyklotron hatte zufälligerweise einen Magneten, bei dem der Wert für n in dem in c) berechneten Bereich lag und daher stabil war.

(4 Punkte)

Aufgabe 17:

Die Zerfallsprodukte von hochenergetischen Teilchen kommen überwiegend bei sehr kleinem Winkel θ_L bezüglich der Teilchen-Strahlrichtung heraus (wichtig z. B. für die Herstellung von Neutrinostrahlen). Überprüfen Sie dies für den Zerfall

$$b(E_L, \vec{p}_L) \to P(E, \vec{q}) + \ldots.$$

wobei der Zerfallswinkel θ_L definiert ist durch

$$\vec{p}_L \cdot \vec{q} = |\vec{p}_L||\vec{q}| \cos\theta_L$$

Zeigen Sie, dass für hohe Strahlenergien $E_L >> m_b c^2$ für den Zerfallswinkel gilt

$$\tan\theta_L \approx \frac{m_b c^2}{\sqrt{2}\;\; E_L} \frac{u \sin\theta_c}{u \cos\theta_c + c}$$

u ist die Länge des Geschwindigkeitsvektors von P im Laborsystem. θ_c ist der Zerfallswinkel im Ruhesystem der zerfallenden Teilchen. Das heißt θ_L ist sehr klein, außer wenn u $\approx$ c <u>und</u> cos $\theta_c \approx$ -1.

(4 Punkte)