Abgabe: 08.11.2007

Übungen zu „Kern- und Teilchenphysik I“

(M.P. Heyn, H.-E. Mahnke, R. Püttner)

Übung 3:

Aufgabe 9:

Zeigen Sie, dass für die Bahngleichung eines relativistischen Protons, das sich mit $|\vec{p}|$ und kleiner Neigung zur Strahlachse (z) in einem Quadrupolmagneten bewegt (siehe Vorlesung für Geometrie und Parameter), gilt

$$\frac{d^2x}{dz^2} + kx = 0$$

und

$$\frac{d^2y}{dz^2} - ky = 0$$

mit $k = \frac{eg}{|\vec{p}|}$ (k: Quadrupolstärke; g>0). Diese Gleichungen sind gültig für „paraxial“ Bahnen, d. h. v_x/v_z und $v_y/v_z \ll 1$.

(3 Punkte)

Aufgabe 10:

Es sind $\begin{pmatrix} x_o \\ x'_0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} y_o \\ y'_0 \end{pmatrix}$ die Orte und Steigungen $\left(x' \equiv dx/dz,\ y' \equiv dy/dz \right)$ der Bahn am Eintritt des Quadrupols und $\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$ am Ende des Quadrupols der Länge L. Zeigen Sie, dass

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} = M_F \begin{pmatrix} x_o \\ x'_0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} = M_D \begin{pmatrix} y_o \\ y'_0 \end{pmatrix}$$

mit

$$M_F = \begin{pmatrix} \cos\sqrt{k}L & \frac{1}{\sqrt{k}} \sin\sqrt{k}L \\ -\sqrt{k}\sin\sqrt{k}L & \cos\sqrt{k}L \end{pmatrix},\ M_D = \begin{pmatrix} \cosh\sqrt{k}L & \frac{1}{\sqrt{k}} \sinh\sqrt{k}L \\ \sqrt{k}\sinh\sqrt{k}L & \cosh\sqrt{k}L \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie, dass in einer feldfreien Region der Länge ℓ, die Änderungen von Ort und Steigung charakterisiert werden durch die Matrix

$$M_0 = \begin{pmatrix} 1 & \ell \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Transfermatrix einer beliebigen Folge von Bahn-Elementen (wie z. B. auch Dipolmagneten) ist, wie in der geometrischen Optik für paraxial Strahlen gegeben durch das Produkt der Matrizen:

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_{OUT} = \left(\prod_i M_i \right) \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_{IN}; \qquad \prod_i M_i = M^{sys}$$

Für x_{OUT} gilt

$$x_{OUT} = M_{11}^{sys} \quad x_{IN} + M_{12}^{sys} \quad x_{IN}'$$

Wir reden von einer Abbildung, wenn alle Strahlen (Bahnen), die von einem Punkt ausgehen, wieder in einem Punkt (Bild) gesammelt werden. Dies bedeutet, dass für eine Abbildung $M_{12}^{sys} = 0$ sein muss, da dann x_{OUT} unabhängig von x_{IN}' (Winkel/Neigung im Ausgangspunkt) wird. Beweisen Sie, dass

$$M_L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix}$$

die Matrix einer dünnen Linse der Brennweite f darstellt. Wählen Sie dazu einen Punkt im Abstand s_1 vor der Linse und einen Punkt auf Abstand s_2 hinter der Linse. Multiplizieren Sie die drei Matrizen (frei, Linse, frei), und zeigen Sie, dass aus der Bedingung $M_{12}^{sys} = 0$ die Linsengleichung

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2}$$

folgt.

(5 Punkte)

<u>Aufgabe 11:</u>

Zeigen Sie, dass M_F für einen fokussierenden Quadrupolmagneten zerlegt werden kann in folgendes Produkt:

$$M_F = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{k}} \tan\frac{\sqrt{k}L}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\sqrt{k}\sin\sqrt{k}L & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{k}} \tan\frac{\sqrt{k}L}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Das heißt, M_F ist ein Produkt von feldfreier Strecke mit $\ell = \frac{1}{\sqrt{k}} \tan\frac{\sqrt{k}L}{2}$, einer dünnen Linse mit $f = \frac{1}{\sqrt{k}\sin\sqrt{k}L}$ und einer feldfreien Strecke mit $\ell = \frac{1}{\sqrt{k}} \tan\frac{\sqrt{k}L}{2}$. Das bedeutet, ein Quadrupolmagnet ist als eine dicke Linse zu betrachten. Skizzieren Sie die Bahn für ein parallel zur z-Achse auffallendes Teilchen mit $x_0 \neq 0$ und $x_0' = 0$ beim Eintritt des Quadrupols, bis zum Fokus auf der z-Achse hinter dem Quadrupol. Extrapolieren Sie die zwei geraden Teile der Bahn außerhalb des Magnetfelds vorwärts und rückwärts innerhalb des Magneten. Der Schnittpunkt bestimmt die Lage der Hauptebene. Zeigen Sie explizit mit Hilfe dieser geometrischen Konstruktion, das $f = \frac{1}{\sqrt{k}\sin\sqrt{k}L}$ und das der Abstand zwischen der Hauptebene und Exit-Seite des Magneten $\frac{1}{\sqrt{k}} \tan\frac{\sqrt{k}L}{2}$ beträgt.

(5 Punkte)