Heiko Dumlich 24. Januar 2008

# 12 Übungsblatt Kern und Teilchenphysik

## 12.1 (Schalenmodell)

Energieeigenwerte der Nukleonen

$$E_{n,l} = \left(\lambda + \frac{3}{2}\right)\hbar\omega \qquad \text{mit } \lambda = 2\,(n-1) + l = 0, 1, 2, \ldots$$

Wir betrachten das Niveauschema aus dem Skript (s. 10.1.2008). Wir sehen links die Energien aufgetragen, mit $\lambda$ werden die Energieniveaus bezeichnet. Die linke Hälfte behandelt den Fall eines harmonischen Oszillators, während die rechte Hälfte ein Rechteckpotential behandelt, welches als Näherung für das Wood-Saxon-Potential angesehen werden kann. Die Paritäten ergeben sich aus den "Orbitalen" $s, p, d, \ldots$ . Der Niveauabstand ist abhängig vom Potential, zusätzlich treten Entartungen auf, wobei jeder Zustand $(2l+1)$-fach entartet ist. So sind $s$ Zustände 1 fach entartet und durch 2 Teilchen besetzbar und $p$ 3 fach entartet und durch 6 Teilchen besetzbar, etc.. Beim Oszillator existiert zudem noch "zufällige" Entartungen z.B. $l = 3, n = 1$ und $l = 1, n = 2$ liefern beide $\lambda = 3$. Beim Übergang zum Rechteckpotential wird diese jedoch aufgehoben. Die Schalenabschlüsse sind abhängig von dem jeweilig betrachteten Element, wobei für den Grundzustand die energetisch niedrigste Besetzung angestrebt wird.

Wir stellen im folgenden die Niveaubezeichnungen $(nlj)$ der letzten $j$-Schale für die doppelt magischen Kerne zusammen (unter Zuhilfenahme von Fig.80 aus May84 aus den Vorlesungsfolien, Betrachtung der Neutronen):

| $nlj$ | $1s\frac{1}{2}$ | $1p\frac{1}{2}$ | $1d\frac{3}{2}$ | $1f\frac{7}{2}$ | $3p\frac{1}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Kern | $^{4}He$ | $^{16}O$ | $^{40}Ca$ | $^{48}Ca$ | $^{208}Pb$ |

Nun ist die Gesamtkonfiguration für Proton und Neutron anzugeben

| Kern | $(\pi\, n'l'j')^{\kappa}$ | $(\nu\, nlj)^{\lambda}$ | $I^{\pi}$ |
|---|---|---|---|
| $^{3}H$ | $\left(1\,1s\frac{1}{2}\right)^{1}$ | $\left(2\,1s\frac{1}{2}\right)^{2}$ | $\frac{1}{2}^{+}$ |
| $^{7}Li$ | $\left(3\,1p\frac{3}{2}\right)^{1}$ | $\left(4\,1p\frac{3}{2}\right)^{2}$ | $\frac{9}{2}^{-}, \frac{7}{2}^{-}, \frac{5}{2}^{-}, \frac{3}{2}^{-}, \frac{1}{2}^{-}$ |
| $^{11}B$ | $\left(5\,1p\frac{3}{2}\right)^{3}$ | $\left(6\,1p\frac{3}{2}\right)^{4}$ | $\frac{3}{2}^{-}$ |
| $^{13}C$ | $\left(6\,1p\frac{3}{2}\right)^{4}$ | $\left(7\,1p\frac{1}{2}\right)^{1}$ | $\frac{1}{2}^{-}$ |
| $^{13}N$ | $\left(7\,1p\frac{1}{2}\right)^{1}$ | $\left(6\,1p\frac{3}{2}\right)^{4}$ | $\frac{1}{2}^{-}$ |
| $^{15}N$ | $\left(7\,1p\frac{1}{2}\right)^{1}$ | $\left(8\,1p\frac{1}{2}\right)^{2}$ | $\frac{1}{2}^{-}$ |
| $^{17}O$ | $\left(8\,1p\frac{1}{2}\right)^{2}$ | $\left(9\,1d\frac{5}{2}\right)^{1}$ | $\frac{5}{2}^{+}$ |
| $^{19}F$ | $\left(9\,1d\frac{5}{2}\right)^{1}$ | $\left(10\,1d\frac{5}{2}\right)^{2}$ | $\frac{15}{2}^{+}, \frac{13}{2}^{+}, \ldots, \frac{3}{2}^{+}, \frac{1}{2}^{+}$ |
| $^{39}Ca$ | $\left(20\,1d\frac{3}{2}\right)^{4}$ | $\left(19\,1d\frac{3}{2}\right)^{3}$ | $\frac{3}{2}^{+}$ |
| $^{209}Pb$ | $\left(82\,3s\frac{1}{2}\right)^{2}$ | $\left(127\,2g\frac{9}{2}\right)^{1}$ | $\frac{9}{2}^{+}$ |
| $^{209}Bi$ | $\left(83\,1h\frac{9}{2}\right)^{1}$ | $\left(126\,3p\frac{1}{2}\right)^{2}$ | $\frac{9}{2}^{-}$ |

## 12.2 (Magnetisches Moment im Schalenmodell)

Wir kennen das magnetische Moment von $^{209}Bi$

$$\mu_{Bi} = 4.1106\,(2) \cdot \mu_n$$

Wir betrachten den $8^+$ Zustand des $Po$ unter Verwendung des $\frac{9}{2}^-$ magnetischen Moments von $^{209}Bi$ d.h. $J = \frac{9}{2} = j = l \pm \frac{1}{2}$. Mit

$$g = \frac{\mu}{j}$$

folgt also

$$g = 0.9135$$

der experimentelle Wert ist gegeben mit

$$g_{exp} = 0.919\,(6)$$

somit beträgt die Abweichung gerade einmal

$$\frac{g_{exp}}{g} = 1.00602$$

d.h. ca. 0.6%. Die Genauigkeit der Messung beträgt dahingegen 0.7%. D.h. das Ergebnis ist sogar im Rahmen der Messegenauigkeit annehmbar, obwohl wir einen anderen Kern zur Berechnung des $8^+$ Po-Zustandes genutzt haben.

## 12.3 (Rotationszustände)

Die Deutung im Einteilchen-Schalenmodell wird möglich, wenn wir uns einen Kern mit abgeschlossener Schale umringt von "Valenznukleonen" vorstellen. Auf Grund dieser "Valenznukleonen", erhalten wir eine leicht deformierbare Kugelgestalt. Diese elliptisch deformierter Zustand kann nun rotieren und die Rotationsenergie ist gequantelt. Es ergeben sich, als Energiezustände die Rotationszustände mit den Eigenwerten

$$E_I = \frac{\hbar^2}{2\theta} I\,(I+1) \tag{1}$$

Indem wir die Energieeigenwerte auf $E_{2+}$ beziehen erhalten wir:

$$\frac{E_I}{E_{2+}} = \frac{\frac{\hbar^2}{2\theta} I\,(I+1)}{\frac{\hbar^2}{2\theta} 2\,(2+1)} = \frac{I\,(I+1)}{6} \Rightarrow E_I = \frac{I\,(I+1)}{6} E_{2+}$$

Wir nutzen $E_{2+} = 0.101$ als bekannte Größe und setzen diese ein um die höheren Anregungsenergien $I > 2$ zu bestimmen:

| $I$ | Energie in MeV rechnerisch | Energie in MeV experimentell | relativer Fehler in % |
|---|---|---|---|
| 4 | 0.337 | 0.322 | 4.6 |
| 6 | 0.707 | 0.643 | 10.0 |
| 8 | 1.212 | 1.043 | 16.2 |
| 10 | 1.85 | 1.505 | 22.9 |
| 12 | 2.626 | 2.016 | 30.3 |
| 14 | 3.535 | 2.567 | 37.7 |
| 16 | 4.579 | 3.152 | 45.3 |
| 18 | 5.757 | 3.767 | 52.8 |
| 20 | 7.07 | 4.421 | 59.9 |
| 22 | 8.518 | 5.130 | 66.0 |
| 24 | 10.1 | 5.902 | 71.1 |

Der prozentuale Fehler nimmt stark zu, umso höher $I$ wird. Die Energiewerte liegen zumindest noch in derselben Größenordnung, jedoch scheint dieses Modell für das gegebene Element nicht anwendbar. Um das Trägheitsmoment zu bestimmen können wir Gleichung (1) umstellen:

$$\theta = \frac{3\hbar^2}{E_{2+}}$$

hieraus ergibt sich für das Trägheitsmoment:

$$\theta = 2.06 \cdot 10^{-54}\,\mathrm{Js}^2 = 2.06 \cdot 10^{-54}\,\mathrm{kgm}^2$$

Für das Trägheitsmoment einer Kugel gilt

$$\theta = \frac{2}{5} m r^2$$

Mit der Masse des $^{170}Hf$, $m_{Hf} = 170\,\frac{\mathrm{GeV}}{c^2} = 3.03 \cdot 10^{-25}\,\frac{\mathrm{Js}^2}{\mathrm{m}^2}$ und dem Kernradius von $R_0 = 1.4\,\mathrm{fm}$ folgt also

$$\theta = 2.37 \cdot 10^{-55}\,\mathrm{kgm}^2$$

D.h. wir liegen ca. nur eine Ordnung neben dem Trägheitsmoment eines starren Rotators. Wir haben also eine elliptische Form.

## 12.4 ("Schwere" Masse - Test der Relativitätstheorie)

Wir nutzen

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{mg\Delta h}{mc^2} = \frac{g\Delta h}{c^2} = 2.5 \cdot 10^{-15}$$

d.h. die Energieänderung beträgt $\Delta E = 2.5 \cdot 10^{-15} \cdot E$. Die natürliche Linienbreite ist gegeben mit

$$\Delta E \Delta t = \frac{\hbar}{2}$$

mit $\Delta t = \tau$ folgt also:

$$\Delta E = \frac{\hbar}{2\tau} = 2.37 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{J}$$

nun können wir noch Teilen durch $E = 14\,\mathrm{keV} = 2.24 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{J}$ und erhalten:

$$\frac{\Delta E}{E} = 1.05 \cdot 10^{-12}$$

somit also aus der natürlichen Linienbreite $\Delta E = 1.05 \cdot 10^{-12}\,E$. D.h. einen Unterschied von ca. 3 Größenordnungen. nun für den Fall von $^{67}Zn$, hieraus folgt

$$\Delta E = 2.4 \cdot 10^{-15} \cdot E$$

hier liegt also der aus der natürlichen Linienbreite bestimmte Wert ungefähr bei dem Wert der Energieänderung aus dem Test der Relativitätstheorie.