

11 Übungsblatt Kern und Teilchenphysik

11.1 (Magnetisches Moment)

Definition des magnetischen Momentes:

$$\vec{\mu}_{op} = g_1 \vec{j}_1 + g_2 \vec{j}_2$$

a)

zz:

$$2g_j = g_1 + g_2 + (g_1 - g_2) \cdot \frac{j_1(j_1 + 1) - j_2(j_2 + 1)}{j(j + 1)} \quad (1)$$

mit dem Projektionsvektor $\vec{\mu} = g_j \vec{j}$

$$\begin{aligned} \vec{\mu} &= \frac{(\vec{\mu}_{op} \cdot \vec{j})}{|\vec{j}|} \cdot \frac{\vec{j}}{|\vec{j}|} \\ &= \frac{g_1 (\vec{j}_1 \cdot \vec{j}) + g_2 (\vec{j}_2 \cdot \vec{j})}{|\vec{j}|} \cdot \frac{\vec{j}}{|\vec{j}|} \end{aligned} \quad (2)$$

und $\vec{j} = \vec{j}_1 + \vec{j}_2$, dies ist äquivalent zu $\vec{j}_1 = \vec{j} - \vec{j}_2$ bzw. $\vec{j}_2 = \vec{j} - \vec{j}_1$, wobei quadrieren dieser Terme auf

$$\begin{aligned} \vec{j}_1^2 &= \vec{j}^2 + \vec{j}_2^2 - 2\vec{j} \cdot \vec{j}_2 \\ \vec{j}_2^2 &= \vec{j}^2 + \vec{j}_1^2 - 2\vec{j} \cdot \vec{j}_1 \end{aligned}$$

führt. Durch umstellen und einsetzen von $\langle \vec{j}_i^2 \rangle = j_i(j_i + 1)$ erhalten wir somit

$$\begin{aligned} \langle \vec{j}_1 \cdot \vec{j} \rangle &= \frac{1}{2} \{j(j + 1) + j_1(j_1 + 1) - j_2(j_2 + 1)\} \\ \langle \vec{j}_2 \cdot \vec{j} \rangle &= \frac{1}{2} \{j(j + 1) + j_2(j_2 + 1) - j_1(j_1 + 1)\} \end{aligned}$$

dies können wir in (2) einsetzen

$$\begin{aligned}
\langle \vec{\mu} \rangle &= \frac{g_1 [j(j+1) + j_1(j_1+1) - j_2(j_2+1)] + g_2 [j(j+1) + j_2(j_2+1) - j_1(j_1+1)]}{2 \langle |\vec{j}|^2 \rangle} \cdot \langle \vec{j} \rangle \\
g_j \langle \vec{j} \rangle &= \frac{g_1 [j(j+1) + j_1(j_1+1) - j_2(j_2+1)] + g_2 [j(j+1) + j_2(j_2+1) - j_1(j_1+1)]}{2j(j+1)} \cdot \langle \vec{j} \rangle \\
g_j &= \frac{g_1 [j(j+1) + j_1(j_1+1) - j_2(j_2+1)] + g_2 [j(j+1) + j_2(j_2+1) - j_1(j_1+1)]}{2j(j+1)} \\
2g_j &= g_1 + g_2 + (g_1 - g_2) \cdot \frac{j_1(j_1+1) - j_2(j_2+1)}{j(j+1)}
\end{aligned}$$

□

Für den Spezialfall $j_1 = l$, $j_2 = s$ ($s = \frac{1}{2}$) und $j = l \pm \frac{1}{2}$ erhalten wir:

$$\begin{aligned}
2g_j &= g_l + g_s + (g_l - g_s) \cdot \frac{l(l+1) - \frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)}{(l \pm \frac{1}{2})(l \pm \frac{1}{2} + 1)} \\
g_j &= \frac{g_l (l(l+1) + \frac{1}{4} \pm (l + \frac{1}{2}) + l(l+1) - \frac{3}{4}) + g_s (l(l+1) + \frac{1}{4} \pm (l + \frac{1}{2}) - l(l+1) + \frac{3}{4})}{2(l + \frac{1}{2})(l + \frac{1}{2} \pm 1)} \\
g_j &= \frac{g_l (2l(l+1) + \frac{1}{2} \pm 2(l + \frac{1}{2}) - 1 \mp (l + \frac{1}{2})) + g_s (1 \pm (l + \frac{1}{2}))}{2(l + \frac{1}{2})(l + \frac{1}{2} \pm 1)} \\
g_j &= \frac{g_l (2(l + \frac{1}{2})(l + \frac{1}{2} \pm 1) \mp (l + \frac{1}{2} \pm 1)) \pm g_s (l + \frac{1}{2} \pm 1)}{2(l + \frac{1}{2})(l + \frac{1}{2} \pm 1)} \\
g_j &= g_l \pm \frac{g_s - g_l}{2l + 1}
\end{aligned}$$

b)

Wir wollen nun $\mu = g_j j$ bestimmen, dazu setzen wir die in **a**) gewonnene Formel für g_j ein (wobei wir $s = \frac{1}{2}$ nutzen können):

$$\mu = \left(g_l \pm \frac{g_s - g_l}{2l + 1} \right) j \quad (3)$$

Als Formel für die Schmidt-Linien ergibt sich, wobei wir $l = l(j) = j \mp \frac{1}{2}$ beachten müssen, aus Formel (3):

$$\mu = g_l j \pm \frac{(g_s - g_l) j}{2j \mp 1 + 1}$$

nun können wir für das ungepaarte Proton bzw. Neutron nutzen, dass $I = l = \frac{1}{2}$ gilt, somit also $j = 1$, was mit $g_l = 1$, $g_s = 5.58$ für das Proton und $g_l = 0$, $g_s = -3.82$ für das Neutron mit Hilfe der Formel (3) auf:

$$\begin{aligned}
\mu \Big|_p (j=1) &= \left(1 \pm \frac{5.58 - 1}{2 \mp 1 + 1} \right) = 3.29, -0.145 \\
\mu \Big|_n (j=1) &= \left(0 \pm \frac{-3.82 - 0}{2 \mp 1 + 1} \right) = -1.91, 0.955
\end{aligned}$$

führt.

Wir erhalten hieraus die Schmidt-Linien, welche in Abbildung (1) dargestellt sind.

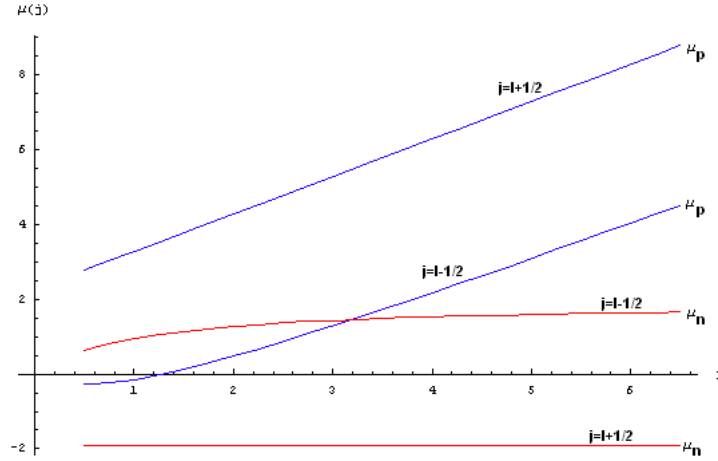


Abbildung 1: Schmidt-Linien für ein ungepaartes Proton (blau) bzw. Neutron (rot)

11.2 (Rückstoß)

Wir beobachten, dass nach dem Einfang thermischer Neutronen ($E_{kin,n} < 100 \text{ meV}$) an ^{10}B nach der Kernreaktion $^{10}\text{B} + n \rightarrow ^7\text{Li}^* + \alpha + Q$, der $\frac{1}{2}^-$ -Zustand in ^7Li bei 477 keV bevölkert wird ($Q = 2.793 \text{ MeV}$). Es ist die Dopplerverschiebung des γ -Quants in und entgegen der Emissionsrichtung des α -Teilchens zu berechnen. Hierfür müssen wir zuerst die relative Geschwindigkeit zwischen dem Li-Kern und dem α -Teilchen bestimmen. Für thermische Neutronen können wir die kinetische Energie des n vernachlässigen und müssen nur die Ruhemasse beachten. Das Bor war zuvor in Ruhe, daher gilt also für dieses auch nur die Ruhemasse. Wir erhalten also aus der Energieerhaltung:

$$\begin{aligned} E_B + E_n &= E_{Li} + 477 \text{ keV} + E_\alpha + Q \\ m_B c^2 + m_n c^2 &= E_{Li} + E_\alpha + 3.27 \text{ MeV} \end{aligned}$$

mit $m_n = 0.939 \frac{\text{GeV}}{c^2}$, $m_B = 10.1 \frac{\text{GeV}}{c^2}$, $m_\alpha = 3.73 \frac{\text{GeV}}{c^2}$ und $m_{Li} = 6.47 \frac{\text{GeV}}{c^2}$.

Wir können uns, da wir nur die relative Geschwindigkeit zwischen dem Li und α benötigen, in das Li-Ruhesystem setzen. D.h. $E_{kin,Li} = 0$, somit folgt $E_{Li} = m_{Li} c^2 = 6.47 \text{ GeV}$, einsetzen liefert:

$$E_\alpha = 4.566 \text{ GeV}$$

mit $E_\alpha = \sqrt{m_\alpha^2 c^4 + p^2 c^2} = \sqrt{13.9 \text{ GeV}^2 + p^2 c^2}$ folgt:

$$\begin{aligned}
13.9 \text{ GeV}^2 + p^2 c^2 &\approx 20.8 \text{ GeV}^2 \\
p^2 &= 6.94 \frac{\text{GeV}^2}{c^2} \\
p &= 2.63 \frac{\text{GeV}}{c} \\
\gamma \frac{v}{c} &= 0.705
\end{aligned}$$

Hieraus können wir nun v bestimmen (mit $a = 0.705$):

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{v}{c} &= a \\
\frac{v^2}{c^2} &= \frac{a^2}{1 + a^2} \\
v &= \sqrt{\frac{a^2}{1 + a^2}} c
\end{aligned}$$

einsetzen von a liefert dann:

$$v = 0.58 \cdot c$$

Es gilt für den Dopplereffekt in Emissionsrichtung:

$$\nu' = \nu \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} = 1.93 \cdot \nu = 2.22 \cdot 10^{20} \frac{1}{\text{s}}$$

mit $E = h\nu = 477 \text{ keV} \Rightarrow \nu = \frac{E}{h} = 1.15 \cdot 10^{20} \frac{1}{\text{s}}$
und entgegen der Emissionsrichtung

$$\nu' = \nu \sqrt{\frac{c-v}{c+v}} = 0.518 \cdot \nu = 0.598 \cdot 10^{20} \frac{1}{\text{s}}$$

Die isotrope γ -Emission folgt aus der Paritätserhaltung des Drehimpulses. Wendet man den Paritätsoperator auf den Drehimpuls an, so erhält man den Drehimpuls. Daher werden immer gleich viele γ -Quanten in die betrachtete und die zu ihr im Kernmittelpunkt invertierte Richtung emittiert. Betrachtet man nun alle Richtungen, so folgt auf Grund der Symmetrie eine isotrope Verteilung.

11.3 (Quadrupolmoment)

a)

Wir betrachten einen Rotationsellipsoiden, für den gelte:

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho_0, & \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} < 1 \\ 0, & \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} > 1 \end{cases}$$

Wir führen neue Koordinaten ein:

$$\begin{aligned}\xi &= \frac{x}{b} \\ \eta &= \frac{y}{b} \\ \zeta &= \frac{z}{a}\end{aligned}$$

mit $dx dy dz = ab^2 d\xi d\eta d\zeta$. Nun führen wir Kugelkoordinaten (alternativ könnte man das ganze auch nur mit Zylinderkoordinaten machen) ein:

$$\begin{aligned}\xi &= r \sin \theta \cos \varphi \\ \eta &= r \sin \theta \sin \varphi \\ \zeta &= r \cos \theta\end{aligned}$$

mit $d\xi d\eta d\zeta = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$, d.h. $dx dy dz = ab^2 r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$. Einsetzen in Q_0 liefert:

$$\begin{aligned}Q_0 &= \frac{1}{e} \int dx dy dz \rho(r) (3z^2 - r^2) \\ &= \frac{\rho_0 ab^2}{e} \int d\xi d\eta d\zeta \rho(r) (3a^2 \zeta^2 - (b^2 \xi^2 + b^2 \eta^2 + a^2 \zeta^2)) \\ &= \frac{\rho_0 ab^2}{e} \int d\xi d\eta d\zeta \rho(r) (2a^2 \zeta^2 - b^2 (\xi^2 + \eta^2)) \\ &= \frac{\rho_0 ab^2}{e} \int_0^1 dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi r^4 \sin \theta (2a^2 \cos^2 \theta - b^2 \sin^2 \theta) \\ &= \frac{2\pi \rho_0 ab^2}{e} \frac{1}{5} \int_0^\pi d\theta (2a^2 \sin \theta \cos^2 \theta - b^2 \sin^3 \theta) \\ &= \frac{\pi \rho_0 ab^2}{e} \frac{2}{5} \left(2a^2 \frac{2}{3} - b^2 \frac{4}{3} \right) \\ &= \frac{4\pi \rho_0 ab^2}{3e} \frac{2}{5} (a^2 - b^2) \\ &= \frac{2}{5} Z (a^2 - b^2)\end{aligned}\tag{4}$$

wobei wir genutzt haben, dass das Volumen eines Rotationsellipsoids mit $V = \frac{4}{3}\pi ab^2$ gegeben ist und $\rho_0 V = Q_{\text{rotellipsoid}} = Ze$.

b)

Wir betrachten Gadolinium, für dieses wurde ein Quadrupolmoment von $Q_0 = 10 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2 = 10^{-27} \text{ m}^2$ gemessen. Es ist das Achsenverhältnis $\frac{a}{b}$ zu bestimmen. Wir setzen jetzt:

$$\begin{aligned}a &= R + \Delta R \\ b &= R - \Delta R\end{aligned}$$

und dies in Formel (4) ein:

$$\begin{aligned} Q_0 &= \frac{2}{5}Z(R^2 + 2R\Delta R + \Delta R^2 - (R^2 - 2R\Delta R + \Delta R^2)) \\ &= \frac{8}{5}ZR\Delta R \end{aligned}$$

Wir können nun mit $R = R_0A^{\frac{1}{3}} = 7.57 \text{ fm} = 7.57 \cdot 10^{-15} \text{ m}$, mit $R_0 = 1.4 \text{ fm}$ und $A = 158$, und $Z = 64$ durch umstellen

$$\Delta R = \frac{5}{8} \frac{Q_0}{ZR} = 1.29 \text{ fm}$$

den Term ΔR bestimmen. Das Verhältnis von $\frac{a}{b}$ erhalten wir über

$$\frac{a}{b} = \frac{R + \Delta R}{R - \Delta R} = \frac{8.86}{6.28} = 1.411$$

11.4 (Elektromagnetische Übergänge)

a)

Da die Parität erhalten bleiben muss, wird der Zustand $\frac{13}{2}^+$ keine Übergänge besitzen. Es gilt für die Quantenzahlen beim elektromagnetischen Übergang:

$$|I_1 - I_2| \leq l \leq I_1 + I_2 \quad \text{und} \quad m = m_1 - m_2$$

Es werden tatsächlich fast nur Übergänge mit dem niedrigst möglichen l beobachtet. Daher reduziert sich die Auswahlregel in den meisten Fällen auf:

$$l = |I_1 - I_2|$$

Die möglichen Übergänge sind:

Übergang	l	Energie in MeV	Lebensdauer in s
$\frac{5}{2}^- \rightarrow \frac{1}{2}^-$	2, 3	0.002	10^{-7}
$\frac{5}{2}^- \rightarrow \frac{3}{2}^-$	1, 4	0.263	10^{-8}
$\frac{5}{2}^- \rightarrow \frac{7}{2}^-$	1, 6	0.703	10^{-10}
$\frac{5}{2}^- \rightarrow \frac{9}{2}^-$	2, 7	0.988	10^{-11}
$\frac{1}{2}^- \rightarrow \frac{3}{2}^-$	1, 2	0.261	$0.5 \cdot 10^{-8}$
$\frac{1}{2}^- \rightarrow \frac{7}{2}^-$	3, 4	0.701	1
$\frac{1}{2}^- \rightarrow \frac{9}{2}^-$	4, 5	0.986	10^{-1}
$\frac{3}{2}^- \rightarrow \frac{7}{2}^-$	2, 5	0.440	$0.5 \cdot 10^{-9}$
$\frac{3}{2}^- \rightarrow \frac{9}{2}^-$	3, 6	0.725	1
$\frac{7}{2}^- \rightarrow \frac{9}{2}^-$	1, 8	0.285	10^{-8}

Der langlebigste Zustand ist demnach $\frac{13}{2}^+$, da für diesen gar kein Übergang auf Grund der Paritätserhaltung möglich ist.

b)

Aus der Aufgabenstellung erhalten wir für die Halbwertszeit eines $\frac{5}{2}^+ \rightarrow \frac{1}{2}^+$ Überganges (E2) mit der Übergangsenergie 0.245 MeV im ^{111}Cd die Dauer von $84 \text{ ns} = 8.4 \cdot 10^{-8} \text{ s}$. Der Vergleich mit der Graphik liefert $T_{\frac{1}{2}, \text{Cd}} = 0.5 \cdot 10^{-8} \text{ s}$ (wobei die Ablesegenauigkeit eher mäßig ist, da vom Bildschirm aus abgelesen wurde). Für den Fall des $2^+ \rightarrow 0^+$ Überganges (E2) mit der Energie 0.103 MeV im ^{180}W finden wir eine Halbwertszeit von $1.2 \text{ ns} = 1.2 \cdot 10^{-9}$. Ablesen aus der Graphik liefert $T_{\frac{1}{2}, \text{W}} = 10^{-7} \text{ s}$, dieser Wert stimmt nicht mit dem angegebenen überein. Der Grund dafür wird vermutlich sein, dass die angegebene Graphik nur bis $A = 85$ geht, daher ist der zweite Wert, bei einem $A = 180$ nur noch schwer vergleichbar, wohingegen der erste mit $A = 111$ wenigstens noch in der Nähe von $A = 85$ lag.