

10 Übungsblatt Kern und Teilchenphysik

10.1 (Massenformel - α -Zerfall)

Wir betrachten die Massenformel:

$$B = a_V \cdot A - a_S \cdot A^{\frac{2}{3}} - a_C \cdot \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}} - a_A \cdot \frac{(N-Z)^2}{A} + a_P \cdot \frac{\delta}{A^{\frac{1}{2}}}$$

with $a_V = 15.85 \frac{\text{MeV}}{c^2}$, $a_S = 18.34 \frac{\text{MeV}}{c^2}$, $a_C = 0.71 \frac{\text{MeV}}{c^2}$, $a_A = 23.22 \frac{\text{MeV}}{c^2}$ und $a_P = 11.46 \frac{\text{MeV}}{c^2}$, zudem ist $\delta = 1$ für gg -Kerne. Wir kennen die Bindungsenergie eines α -Teilchens, diese ist gegeben mit $B(^4\text{He}) = 28.3 \text{ MeV}$. Wir müssen zusätzlich beachten, dass $Z = Z(A)$, d.h. wir suchen das stabilste Z für ein gegebenes A . Experimentell wurde dieser Zusammenhang als:

$$Z(A) = \frac{A}{\left(1.98 + 0.015A^{\frac{2}{3}}\right)}$$

bestimmt. Einsetzen von $N = A - Z$ liefert:

$$B = a_V \cdot A - a_S \cdot A^{\frac{2}{3}} - a_C \cdot \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}} - a_A \cdot \frac{(A-2Z)^2}{A} + a_P \cdot \frac{\delta}{A^{\frac{1}{2}}}$$

und einsetzen von $Z = Z(A)$ liefert dann:

$$B = a_V \cdot A - a_S \cdot A^{\frac{2}{3}} - a_C \cdot \frac{\frac{A^2}{\left(1.98+0.015A^{\frac{2}{3}}\right)^2}}{A^{\frac{1}{3}}} - a_A \cdot \left(A - 4Z + 4\frac{Z^2}{A}\right) + a_P \cdot \frac{\delta}{A^{\frac{1}{2}}}$$

$$B = a_V \cdot A - a_S \cdot A^{\frac{2}{3}} - a_C \cdot \frac{A^{\frac{5}{3}}}{\left(1.98 + 0.015A^{\frac{2}{3}}\right)^2} - a_A \cdot \left(A - 4\frac{A}{\left(1.98 + 0.015A^{\frac{2}{3}}\right)} + 4\frac{A}{\left(1.98 + 0.015A^{\frac{2}{3}}\right)^2}\right)$$

Nun können wir direkt $A = 120$, $A = 116$ und $A = 200$, $A = 196$ einsetzen, diese liefern:

$$\begin{aligned} B(120) &= 512.61 \text{ MeV} \\ B(116) &= 509.19 \text{ MeV} \\ B(200) &= 414.00 \text{ MeV} \\ B(196) &= 425.89 \text{ MeV} \end{aligned}$$

die um $\Delta A = 4$ verringerten Werte stellen jeweils die Kerne nach dem α -Zerfall dar. Daher ist nur ein α -Zerfall möglich, wenn $\Delta B = 28.3 \text{ MeV}$. Wir bilden die Differenzen und finden:

$$\begin{aligned}
B(116) - B(120) &= -3.42 \text{ MeV} \\
B(196) - B(200) &= 11.90 \text{ MeV}
\end{aligned}$$

das zeigt, dass nur der α -Zerfall für den Kern mit $A = 200$ möglich ist, während der Kern mit $A = 120$ gegenüber α -Zerfall stabil ist (im Grunde genommen sind bei beiden die Energien kleiner als ΔB , aber sehe jetzt nicht woran es liegt).

10.2 (Stoßkinematik)

Elastischer Stoß zwischen Teilchen 1 und ruhendem Teilchen 2, es ist zu zeigen, dass für nichtrelativistische Geschwindigkeiten maximal auf das Teilchen 2 die Energie:

$$E_2 = \begin{cases} 4E_1 \frac{m_2}{m_1} & \text{für } m_1 \gg m_2 \\ 4E_1 \frac{m_1}{m_2} & \text{für } m_2 \gg m_1 \end{cases}$$

übertragen wird. Da Teilchen zwei vor dem Stoß in Ruhe sei, besitzt es keinen Impuls und klassisch (nicht relativistisch) gesehen keine Energie, d.h. $\vec{p}_2^{\text{vorher}} = 0$ und $E_2^{\text{vorher}} = 0$. Wir nutzen den Energie- und Impulserhaltungssatz:

$$\begin{aligned}
E_1 &= E_1' + E_2 \\
\vec{p}_1 &= \vec{p}_1' + \vec{p}_2
\end{aligned}$$

mit der klassischen kinetischen Energie $E = \frac{p^2}{2m}$ und nach umstellen und quadrieren der Impulsgleichung erhalten wir:

$$\begin{aligned}
p_1'^2 &= p_1^2 - \frac{m_1}{m_2} p_2^2 \\
\vec{p}_1'^2 &= \vec{p}_1^2 + \vec{p}_2^2 - 2\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2
\end{aligned}$$

D.h. also für den maximaln Energieübertrag $\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 = |\vec{p}_1| |\vec{p}_2|$:

$$\begin{aligned}
\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) p_2^2 &= 2p_1 p_2 \\
2p_1 &= \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) p_2 \\
4 \frac{p_1^2}{2m_1} &= \frac{m_2}{m_1} \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)^2 \frac{p_2^2}{2m_2} \\
4E_1 &= \frac{m_2}{m_1} \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)^2 E_2
\end{aligned}$$

betrachten wir nun die Grenzfälle $m_1 \gg m_2$, hierfür kann man die 1 in der Klammer vernachlässigen und erhält:

$$\frac{E_2}{E_1} = 4 \frac{m_2}{m_1}$$

den Fall $m_2 \gg m_1$ führt zu einer Vernachlässigbarkeit des $\frac{m_1}{m_2}$ Term in der Klammer, somit folgt:

$$\frac{E_2}{E_1} = 4 \frac{m_1}{m_2}$$

Für den relativen maximalen Energieübertrag gilt demnach:

$$\frac{E_2}{E_1} = \begin{cases} 4 \frac{m_2}{m_1} & \text{für } m_1 \gg m_2 \\ 4 \frac{m_1}{m_2} & \text{für } m_2 \gg m_1 \end{cases}$$

□

a)

Wir betrachten nun den relativen maximalen Energieübertrag beim Stoß eines ^{12}C -Teilchens mit einem ruhenden Elektron:

$$\frac{E_2}{E_1} = 4 \frac{m_2}{m_1}$$

da $m_1 = m_{^{12}\text{C}} = 12.0107 \cdot u \gg m_2 = m_{e^-} = 5.485799110 \cdot u$, mit $u = 1.660538782 \cdot 10^{-27}$ kg. Somit folgt also:

$$\frac{E_2}{E_1} = 0.000182697$$

d.h. es können nur ca. 0.02% der Energie des C-Teilchens an das Elektron übertragen werden.

b)

Wir betrachten jetzt ein $E_1 = 3 \text{ MeV}$ Elektron, welches mit einem ruhenden Goldatom stößt. Die Ruhemasse des Elektrons ($m_{e^-} = 511.707 \text{ keV}$) haben wir bereits in **a)** betrachtet, da wir jedoch nun ein relativistisches Elektron besitzen, müssen wir die dynamische Masse bestimmen. Diese ist gegeben über:

$$m = \frac{E_1}{c^2} = \gamma m_{0,e^-}$$

Einsetzen liefert:

$$m_1 = m = 3.21618 \cdot 10^{-3} \cdot u$$

Dennoch ist die Masse des Goldatoms noch sehr viel größer als die Masse des bewegten Elektrons $m_2 = m_{Au} = 196.966569 \cdot u$. Somit folgt also für den maximalen Energieübertrag:

$$E_2 = 4E_1 \frac{m_1}{m_2} = 3.13935 \cdot 10^{-17} \text{ J} = 195.943 \text{ eV}$$

Die genutzte Formel gilt hier allerdings eigentlich nur für nicht relativistische Teilchen, daher müssten wir auch die Energieformel relativistisch herleiten und könnten dann vergleichen.

10.3 (Rutherford-Streuung)

a)

Wir gehen aus von der Formel:

$$r = \frac{a}{1 - \varepsilon \cos \phi}$$

mit

$$\varepsilon^2 = 1 + \cot^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} \Leftrightarrow \varepsilon = \frac{1}{\sin \frac{\theta}{2}}$$

Für den Fall des minimalen Abstandes gilt $\phi = 0^\circ$, somit also:

$$r_{min} = \frac{a}{1 - \varepsilon} = \frac{a}{1 - \frac{1}{\sin \frac{\theta}{2}}} = \frac{a \sin \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2} - 1}$$

Aus der Vorlesung erhalten wir

$$r_{min} = \frac{zZe^2}{8\pi\epsilon_0 E} \left(1 + \frac{1}{\sin \frac{\theta}{2}} \right)$$

mit dem Streuwinkel $\theta = 60^\circ$ folgt somit:

$$r_{min}(60) = \frac{zZe^2}{8\pi\epsilon_0 E} \cdot 3$$

Wir können nun den Fall betrachten für ein α -Teilchen mit $z = 2$ und einen Pb-Kern mit $Z = 82$. Mit $\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} = 1.44 \text{ MeV fm}$ folgt für $E = 2 \text{ MeV}$:

$$r_{min}(2 \text{ MeV}) = 3 \cdot \frac{2 \cdot 82}{2 \cdot 2} \cdot 1.44 \text{ fm} = 177.12 \text{ fm}$$

und für $E = 27 \text{ MeV}$ folgt:

$$r_{min}(27 \text{ MeV}) = 3 \cdot \frac{2 \cdot 82}{2 \cdot 27} \cdot 1.44 \text{ fm} = 13.12 \text{ fm}$$

Die Annäherung für höhere Energien ist also wie erwartet größer, bzw. der minimale Abstand geringer.

b)

Für die Näherungsformel des Radius eines Kernes, bestimmt über die Rutherford'sche Streuung, hatten wir in der Vorlesung:

$$R = r_0 A^{\frac{1}{3}}$$

wobei $r_0 = 1.25 \text{ fm}$. A ist die Massenzahl und über $A = Z + N$ definiert. Für Blei finden wir $A = 208$, somit folgt:

$$R_{208 \text{ Pb}} = 7.406 \text{ fm}$$

Alternativ können wir auch ausnutzen, dass bei 27 MeV bereits die Streuung der α -Teilchen beginnt von der Rutherford-Streuformel abzuweichen. Dies ist ein Zeichen dafür, dass die Teilchen "überlappen", bzw. andere Effekte neben

dem Coulombpotential eine Rolle spielen. Wir können daher annehmen dass die Teilchen sich berühren, der minimale Abstand entspricht also der Summe der Radien. Somit gilt:

$$r_{min} = r_{\alpha} + r_{208 Pb}$$

Mit der Näherung für das α -Teilchen erhalten wir also:

$$r_{\alpha} = 1.98 \text{ fm}$$

somit folgt für den Radius von Pb in diesem Fall:

$$r_{208 Pb} = r_{min} - r_{\alpha} = 11.14 \text{ fm}$$

da jedoch die Abschätzung von α sehr ungenau ist, da die Kugelförmigkeit nicht gegeben ist, ist anzunehmen, dass die erste Näherung besser war. Für das Coulombpotential folgt für $R_{208 Pb}$ also:

$$\varphi = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z}{eR} = 1.44 \frac{82}{e \cdot 7.406} \text{ MeV} = 15.94 \text{ MV}$$

Wir können unsere Formel für nichtrelativistische Geschwindigkeiten aus **Aufgabe 35** benutzen. Wir erhalten also als maximalen Energieübertrag:

$$E_{Pb} = 4 \cdot E_{\alpha} \cdot \frac{m_{\alpha}}{m_{Pb}} = 4 \cdot 27 \cdot \frac{4}{208} \text{ MeV} = 2.08 \text{ MeV}$$

10.4 (Ladungsverteilung in Kernen)

Wir betrachten eine homogen geladene Kugel und möchten ihren Formfaktor berechnen. Für die Dichte gilt bei homogener Verteilung:

$$\rho(r) = \rho_0 \Theta(R - r)$$

mit $\rho_0 = \text{const.}$ und der Stufenfunktion

$$\Theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

Der Formfaktor lässt sich über die Fourier-Transformierte der Dichteverteilung berechnen:

$$F = \int d^3r \rho(r) \exp(i\vec{q} \cdot \vec{r})$$

Zuerst wählen wir unser Koordinatensystem so, dass $\vec{q} \parallel \vec{e}_z$. Dies liefert $\vec{q} \cdot \vec{r} = qz$. Jetzt transformieren wir in Kugelkoordinaten:

$$\begin{aligned} F &= \int d^3r \rho(r) \exp(izq) \\ &= \rho_0 \int_0^{\infty} dr \Theta(R - r) r^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \sin \theta \exp(iqr \cos \theta) \end{aligned}$$

die Stufenfunktion kann auf die Integralgrenzen angewendet werden und die φ Integration wird ausgeführt:

$$F = 2\pi\rho_0 \int_0^R dr r^2 \int_0^\pi d\theta \sin \theta \exp(iqr \cos \theta)$$

nun substituieren wir $x = \cos \theta$, $\frac{dx}{d\theta} = -\sin \theta$:

$$\begin{aligned} F &= -2\pi\rho_0 \int_0^R dr r^2 \int_1^{-1} dx \exp(iqr x) \\ &= 2\pi\rho_0 \int_0^R dr r^2 \int_{-1}^1 dx \exp(iqr x) \\ &= 2\pi\rho_0 \int_0^R dr r^2 \left[\frac{1}{iqr} \exp(iqr x) \right]_{-1}^1 \\ &= 4 \frac{\pi\rho_0}{q} \int_0^R dr r \frac{\exp(iqr) - \exp(-iqr)}{2i} \end{aligned}$$

mit $\sin x = \frac{\exp(ix) - \exp(-ix)}{2i}$ folgt:

$$F = 4 \frac{\pi\rho_0}{q} \int_0^R dr r \cdot \sin(qr)$$

wir benutzen unseren beliebigen ‘Ableitungstrick’, denn es gilt:

$$-\frac{\partial}{\partial q} \cos(qr) = r \cdot \sin(qr)$$

somit also:

$$\begin{aligned} F &= -4 \frac{\pi\rho_0}{q} \frac{\partial}{\partial q} \int_0^R dr \cdot \cos(qr) \\ &= -4 \frac{\pi\rho_0}{q} \frac{\partial}{\partial q} \left[\frac{1}{q} \sin(qr) \right]_0^R \\ &= -4 \frac{\pi\rho_0}{q} \frac{\partial}{\partial q} (q^{-1} \cdot \sin(qR)) \\ &= -4 \frac{\pi\rho_0}{q} \left(-\frac{1}{q^2} \cdot \sin(qR) + \frac{R}{q} \cos(qR) \right) \\ F &= \frac{4\pi\rho_0}{q^3} (\sin(qR) - qR \cos(qR)) \end{aligned}$$

Für eine besonders schöne Form können wir nun noch $x = qR$ setzen und erhalten:

$$F = \frac{4\pi\rho_0 R^3}{x^3} (\sin(x) - x \cos(x))$$

wobei nun nach einsetzen von $\rho_0 = \frac{Q}{V} = \frac{3Q}{4\pi R^3}$ der elegante Term:

$$F = \frac{3Q}{x^3} (\sin(x) - x \cos(x))$$

entsteht. Den hieraus folgenden Funktionsverlauf findet man in Abbildung (1).

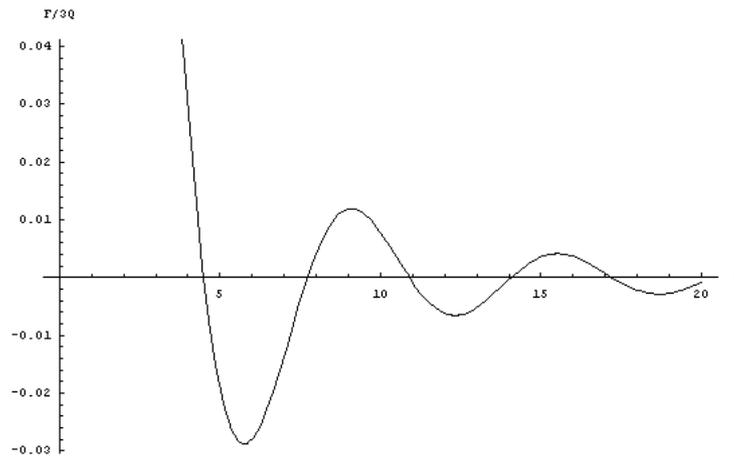


Abbildung 1: Plot des Formfaktors über x