Heiko Dumlich 18. Dezember 2007

9 Übungsblatt Kern und Teilchenphysik

9.1 (Bindungsenergien-Massen)

Massenformel:

$$M(A)\,c^2 = \sum_i M(i)\,c^2 + E$$

wobei E die Zerfallsenergie darstellt.

(1) $n \rightarrow p + e + \bar{\nu}$

Anwendung der Massenformel liefert.

$$m_n c^2 = m_p c^2 + m_e c^2 + m_{\bar{\nu}} c^2 + E \Leftrightarrow E = (m_n - m_p - m_e - m_{\bar{\nu}})\,c^2$$

mit $m_{\bar{\nu}} < 2\,\mathrm{eV}$, können wir das Neutrino vernachlässigen:

$$E = (m_n - m_p - m_e)\,c^2 = 783\,\mathrm{keV}$$

(2) ^{3}H $\rightarrow^3$ He

Anwendung der Massenformel liefert:

$$m_{^3\mathrm{H}} c^2 = m_{^3\mathrm{He}} c^2 + E \Leftrightarrow E = \left(m_{^3\mathrm{H}} c^2 - m_{^3\mathrm{He}} c^2\right) c^2$$

Dies liefert:

$$E = 18.7\,\mathrm{keV}$$

9.2 (Mittlere Lebensdauer - Protonstabilität)

a)

Zu zeigen:

$$\tau = \frac{1}{\lambda}$$

Wir nutzen die Wahrscheinlichkeitsinterpretation des Zerfallsgesetzes, wonach die Zerfallswahrscheinlichkeit für einen bestimmten Zeitpunkt t durch:

$$P(t) = P_0 \exp(-\lambda t)$$

gegeben ist. Für $t = 0$ ist P somit P_0, für $t \rightarrow \infty$ geht $P \rightarrow 0$, die Zerfallswahrscheinlichkeit sinkt mit der Zeit, während die kumulierte Funktion gegen 1 strebt. Für das Zerfallsgesetz können wir die mittlere Lebensdauer als Erwartungswert bestimmen:

$$\tau = \langle t \rangle = \frac{\int_0^\infty t P_0 \exp\left(-\lambda t\right)\, dt}{\int_0^\infty P_0 \exp\left(-\lambda t\right)\, dt} = \frac{-\frac{\partial}{\partial \lambda}\int_0^\infty \exp\left(-\lambda t\right)\, dt}{\frac{1}{\lambda}} = -\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda}\frac{1}{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda}$$

$\square$

b)

Wir nutzen das in **a)** gezeigte und stellen das Zerfallsgesetz um:

$$N\left(t\right) = N_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \Leftrightarrow \tau = \frac{t}{\ln\left(\frac{N_0}{N(t)}\right)}$$

wobei $N_0 = 10^{28}$, $t = 0.4\,\mathrm{a}$ und $N\left(0.4\,\mathrm{a}\right) = 10^{28} - 4$. Wir setzen ein und erhalten:

$$\tau = \frac{0.4}{\ln\left(\frac{10^{28}}{10^{28}-4}\right)}\,\mathrm{a}$$

da der Wert des Logarithmus sehr nah an 1 liegt, können wir den Logartihmus um 1 entwickeln, (Taylor):

$$\ln x = 0 + \frac{1}{1}\left(x-1\right) + \mathcal{O}\left(\left(x-1\right)^2\right) \approx x - 1$$

dies liefert also für die Abschätzung:

$$\tau \approx \frac{0.4}{\frac{10^{28}}{10^{28}-4} - 1}\,\mathrm{a} = \frac{0.4}{\frac{4}{10^{28}-4}}\,\mathrm{a} = \frac{0.4\left(10^{28}-4\right)}{4}\,\mathrm{a} \approx 10^{27}\,\mathrm{a}$$

9.3 (Elementzuordnung - Radioaktives Zerfallsgesetz)

Wir betrachten den Zerfall von Se_2-Paaren, welche in Se-As-Paare übergehen, welche weiter in As_2-Paare zerfallen. Da wir am Anfang 2 Se besitzen, danach nur noch eines, wobei wir davon ausgehen, das die As stabil sind, ist die Zerfallswahrscheinlichkeit der Se_2-Paare doppelt so groß, wie die der Se-As-Paare (unter der Annahme, dass die Umgebung durch die As hier keinen Einfluss hat auf die Stabilität der Se), dies ist äquivalent zu einer halb so großen Halbwertszeit für die Se_2-Paare im Gegensatz zu den Se-As-Paaren. Die radioaktiven ^{75}Se gehen in ^{75}As durch electron capture über, wobei die Halbwertszeit für diesen Zerfall $T_{1/2} = 120\,\mathrm{d}$ beträgt.

$$\mathrm{Se}_2 \xrightarrow{2\lambda} \mathrm{Se} + \mathrm{As} \xrightarrow{\lambda} \mathrm{As}_2$$

Mit der Definition der Halbwertszeit:

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} \Leftrightarrow \lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}$$

finden wir unsere Zerfallskonstanten. Der Zerfall ist sequentiell. Wir behandeln zuerst den ersten Zerfall der Se_2-Paare in die Se-As-Paare:

$$\begin{aligned} \frac{dN_{Se_2}}{dt} &= -2\lambda N_{Se_2} \\ \frac{dN_{Se_2}}{N_0} &= -2\lambda dt \\ N_{Se_2} &= N_0 e^{-2\lambda t} \end{aligned}$$

nun betrachten wir das Zwischenprodukt, die Se-As-Paare, diese werden zum einen zerfallen, aber zum anderen wird die Teilchenzahl auch durch den Zerfall der Se_2-Paare erhöht, daher ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{dN_{Se-As}}{dt} &= 2\lambda N_{Se_2} - \lambda N_{Se-As} \\ \frac{dN_{Se-As}}{dt} + \lambda N_{Se-As} &= 2\lambda N_0 e^{-2\lambda t} \end{aligned}$$

jetzt nutzen wir den Trick, dass $\frac{d}{dt}\left(N_{Se-As}e^{\lambda t}\right) = \frac{dN_{Se-As}}{dt}e^{\lambda t} + \lambda N_{Se-As}e^{\lambda t}$ gilt, daher liefert erweitern mit $e^{\lambda t}$:

$$\frac{d}{dt}\left(N_{Se-As}e^{\lambda t}\right) = 2\lambda N_0 e^{-\lambda t}$$

bzw. nach Integration über t:

$$\begin{aligned} N_{Se-As}e^{\lambda t} &= 2\lambda\left(-\frac{1}{\lambda}\right)N_0 e^{-\lambda t} + c \\ N_{Se-As} &= -2N_0 e^{-2\lambda t} + ce^{-\lambda t} \end{aligned}$$

Um nun noch die Konstante c zu bestimmen, nutzen wir die Randbedingung, dass zum Zeitpunkt $t = 0$ die Anzahl der Se-As-Paare auch 0 sei, daher folgt:

$$\begin{aligned} 0 &= -2N_0 + c \\ c &= 2N_0 \end{aligned}$$

oder eingesetzt:

$$N_{Se-As} = -2N_0\left(e^{-2\lambda t} + e^{-\lambda t}\right)$$

Der funktionale Verlauf der beiden Konzentrationen ist also über:

$$\begin{aligned} N_{Se_2} &= N_0 e^{-2\lambda t} \\ N_{Se-As} &= -2N_0\left(e^{-2\lambda t} + e^{-\lambda t}\right) \end{aligned}$$

gegeben. Ein kleiner Plot (vgl. Abb. (1)) beweist die Aussage, wobei $N_0 \approx 3.4$ aus der halben Halbwertszeit von Se, $N\left(\frac{1}{2}T_{1/2}\right) = 1.7$ bei $60\,\mathrm{d}$ bestimmt wurde, wobei auf Grund der doppelten Zerfallsgeschwindigkeit dies der eigentlichen Halbwertszeit der Se_2-Paare entspricht. Auf Grund der guten Übereinstimmung des Plots mit dem auf dem Aufgabenblatt gegebenen Graphen wird der funktionale Zusammenhang als korrekt angenommen.

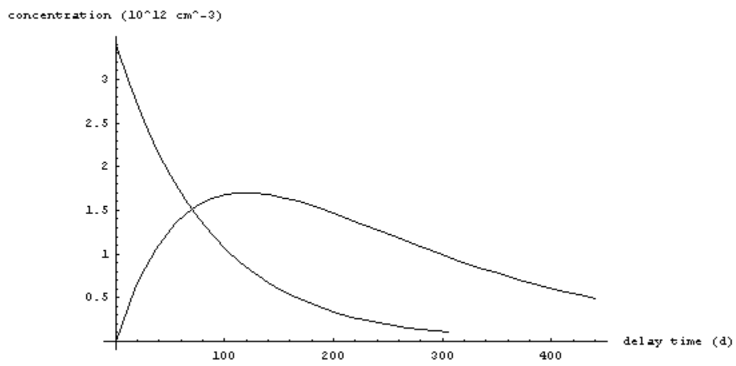

Figure 1: Plot des funktionalen Zusammenhangs

9.4 (Rückstoßenergie)

Ein Photon mit der Energie $E_\gamma = h\nu$ und dem Impuls $p_\gamma = \frac{h}{\lambda} = \frac{h\nu}{c}$ wird emittiert. Es ist die Rückstoßenergie zu bestimmen, die der zurückbleibende Kern aufnimmt. Für den Impuls des Kerns aus dem Rückstoß gilt:

$$p_r = \gamma m_0 v$$

wobei r für Rückstoß steht. Auf Grund der Impulserhaltung gilt:

$$\begin{aligned}
p_\gamma &= p_r \\
\frac{h\nu}{c} &= \gamma m_0 v \\
\frac{h\nu}{c} &= \sqrt{\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}}}m_0 v \\
\frac{h^2\nu^2}{m_0^2 c^2} &= \frac{v^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} \\
\frac{1}{v^2} &= \frac{m_0^2 c^2}{h^2\nu^2} + \frac{1}{c^2} \\
v &= \sqrt{\frac{1}{1+\frac{m_0^2 c^4}{h^2\nu^2}}}c
\end{aligned}$$

Wir haben also eine Formel um die Geschwindigkeit des Kerns zu bestimmen. Hieraus lässt sich danach einfach sehen, dass das Problem klassisch gerechnet werden kann, da wir für die Geschwindigkeiten finden:

$$\begin{aligned}
v_{Na} &= 9.8 \cdot 10^{-11}\, c \\
v_{Cd} &= 1.2 \cdot 10^{-5}\, c
\end{aligned}$$

Es gilt für die klassische kinetische Energie:

$$E_{kin} = \frac{p^2}{2m} = \frac{h^2}{2m\lambda^2} = \frac{h^2\nu^2}{2mc^2}$$

a) Natrium-D-Linie $\lambda = 590\,$nm

Die Masse eines Natriumkerns beträgt $m_{Na} = 22.989770\,\mathrm{u}$ mit $\mathrm{u} = 1.660538782 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$. Wir erhalten somit für die Rückstoßenergie:

$$E_r = \frac{h^2}{2m_{Na}\lambda^2} = 1.65 \cdot 10^{-29}\,\mathrm{J} = 1.03 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{eV}$$

b) γ-Strahlung mit 247 keV

Die Masse des angeregten Cadmium beträgt $m_{Cd} \approx 111\,\mathrm{u}$. Wir erhalten somit für die Rückstoßenergie:

$$E_r = \frac{h^2\nu^2}{2m_{Cd}c^2} = 4.72 \cdot 10^{-20}\,\mathrm{J} = 0.295\,\mathrm{eV}$$