Heiko Dumlich 14. Dezember 2007

8 Übungsblatt Kern und Teilchenphysik

8.1 (Unterdrückte Prozesse)

(1)

$$p + n \to p + \Lambda^0$$

Strangenesserhaltung ist verletzt, da $S\left(\Lambda^0\right) = -1$ ist und $S\left(n\right) = 0$, daher besteht nur die Möglichkeit eines schwachen Zerfalls, welcher unterdrückt ist, da die Wirkungsquerschnitte gering sind.

(2)

$$K^+ \to \pi^+ + \pi^- + \pi^+ + \pi^- + \pi^+ + \pi^0$$

Die Energie eines Pions beträgt ca. $m_{\pi^\pm} = 139.57\,\mathrm{MeV/c^2}$ bzw. $m_{\pi^0} = 134.98\,\mathrm{MeV/c^2}$, die des Kaons $m_{K^+} = 493.68\,\mathrm{MeV/c^2}$. Somit ist hier die Energieerhaltung nicht gegeben, da sich $493.68\,\mathrm{MeV}$ auf der erzeugenden Seite $832.83\,\mathrm{MeV}$ auf der Zerfallsproduktseite gegenüberstehen. (Die Energieerhaltung muss auch für das Ruhesystem des Kaons gelten)

Zusätzlich müsste das Kaon einen schwachen Zerfall in die Pionen ausführen, da hier die Strangenesserhaltung verletzt ist, da $S\left(K^+\right) = 1$ ist und $S\left(\pi^{\pm,0}\right) = 0$.

(3)

$$\Lambda^0 \to K^0 + \pi^0$$

Baryonenzahlerhaltung ist verletzt, da $B\left(\Lambda^0\right) = 1$ ist und $B\left(K^0\right) = 0$ sowie $B\left(\pi^0\right) = 0$.

(4)

$$K^- \to \pi^0 + e^-$$

Die Leptonenzahl ist verletzt, da e^- ein Lepton ist. Strangenesserhaltung ist verletzt, da $S\left(K^-\right) = -1$ ist und $S\left(\pi^0\right) = 0$, sowie e^- ein Lepton, welches gar keine Quarks besitzt, da es selber elementar ist und somit auch $S\left(e^-\right) = 0$ gilt. Es kann also höchstens schwach zerfallen.

(5)

$$\pi^0 \to \gamma + \gamma + \gamma$$

Die CP-Erhaltung ist verletzt. In Aufgabe 22 haben wir gesehen, dass $CP|\pi^0\rangle = C\left(-1\right)|\pi^0\rangle = \left(+1\right)\left(-1\right)|\pi^0\rangle$, nun ist jedoch $CP|\gamma\rangle = \left(-1\right)\left(-1\right)|\gamma\rangle = \left(+1\right)|\gamma\rangle$, mit $J = 1$ und $S = 1$ (Spin-1-Teilchen) folgt $L = 0$, somit würde also auch der Faktor $\left(-1\right)^l = \left(-1\right)^0 = 1$ nichts ändern.

(6)

$$K_L^0 \to \pi^+ + \pi^-$$

Die CP-Erhaltung ist verletzt, K_L^0 müsste in 3 Pionen zerfallen. Das Teilchen K_L^0 setzt sich folgendermaßen zusammen (s. SYMTR 17):

$$|K_L^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{1+|\epsilon|^2}}\left[\epsilon|K_1^0\rangle + |K_2^0\rangle\right]$$

da $\epsilon \approx 2.3 \cdot 10^{-3} \ll 1$, können wir schreiben:

$$|K_L^0\rangle \approx |K_2^0\rangle$$

wobei jedoch (s. SYMTR 15)

$$CP|K_2^0\rangle = (-1)\,|K_2^0\rangle$$

und wie wir in Aufgabe 22 gezeigt haben gilt:

$$CP|\pi^+\pi^-\rangle = (+1)\,|\pi^+\pi^-\rangle$$

somit ist also CP verletzt.

(7)

$$K^+ \to \pi^+ + \pi^+ + \pi^0$$

Ladungserhaltung ist nicht erfüllt, da $q_i = (+1) \to q_f = (+2)$.

8.2 (magnetic horn)

Das "magnetic horn" besteht aus zwei koaxialen Kondensatoren (s. Abb. 1). Ein angelegter Wechselstrom erzeugt in diesem ein Magnetfeld, welches von der Stärke invers zur Entfernung der Horn-Achse ist. Pionen (und Kaonen), die in den das magnetische Volumen des Horns eintreten, werden auf Grund dieses Feldes auf die Horn-Achse fokussiert (die Pionen erfahren also, wenn sie einen Impuls weg von der Hornachse besitzen eine Kraft in Richtung der Hornachse, evtl. übertreten sie diese dann, werden jedoch auf Grund der Symmetrie wieder abgelenkt, so, dass es zu einer gedämpften Oszillation um die Horn-Achse kommt, wobei am Ende des Horns die Flugbahn der Hornachse entspricht. Auf Grund der Form werden auch Teilchen, die in die "falsche" Richtung fliegen abgelenkt und können so auch fokussiert werden). Zum Teil werden auch zwei Horne ineinander gebaut, um das Magnetfeld zu verstärken, welches auf Grund der Radiusgröße des innen liegenden Horns sonst zu schwach wäre. Der Radius benötigt die Größe auf Grund dem im Horn vorhandenen Quecksilber, welches von einem Protonenstrahl angeregt wird und wobei die Pionen entstehen. Dieses Quecksilber "explodiert" dann unter Pionaussendung, diese Explosion benötigt jedoch Raum, womit der Radius an die Raumforderung angepasst werden muss.

Hauptsächlich wird diese Radiusoptimierung bzw. Hornformanpassung durchgeführt um den Pionenfluss zu maximieren, da aus diesen später die Neutrinos entstehen. Durch die Anpassung ist es zudem möglich, den Energiebereich der entstehenden Neutrinos "einzustellen". Die fokussierten Hadronen zerfallen jedoch dennoch unter einem kleinen Winkel, wodurch eine vollständige Fokussierung des Neutrinostrahls nicht möglich ist, da die Neutrinos selbst, auf Grund der fehlenden Wechselwirkung, nicht fokussiert werden können. Jedoch sollte die Fokussierung der Hadronen für geeignete Experimente ausreichen, da bei deren Zerfall die Neutrinos hauptsächlich in Vorwärtsrichtung produziert werden.

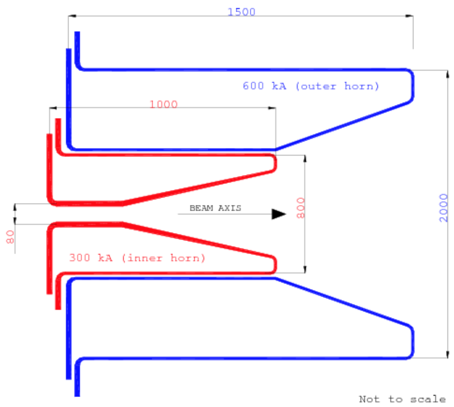

Abbildung 1: Skizze eines magnetischen Doppel-Horns (roter Anteil einfaches (inneres) magnetisches Horn) aus Gilardoni et al. "Status of a magnetic horn for a neutrino factory"

8.3 (Cerenkov-Strahlung)

Wir befinden uns in einem Medium mit dem Brechungsindex n. Ein Teilchen mit Energie E und Geschwindigkeit v emittiere ein Photon $h\nu$. Es ist zu zeigen, dass für den Emissionswinkel:

$$\cos\theta = \frac{1}{n\beta}\left[1 + \frac{h\nu\left(n^2-1\right)}{2E}\right]$$

gilt. Einmal mehr werfen wir unsere Maschinerie der Vierervektoren an:

$$p = p' + p_{h\nu} \Leftrightarrow p' = p - p_{h\nu}$$

quadrieren:

$$\begin{aligned} p'^2 &= p^2 + p_{h\nu}^2 - 2p \cdot p_{h\nu} \\ m^2c^2 &= m^2c^2 + p_{h\nu}^2 - 2\left(\frac{EE_{h\nu}}{c^2} - |\vec{p}|\,|\vec{p}_{h\nu}|\cos\theta\right) \end{aligned}$$

umstellen liefert:

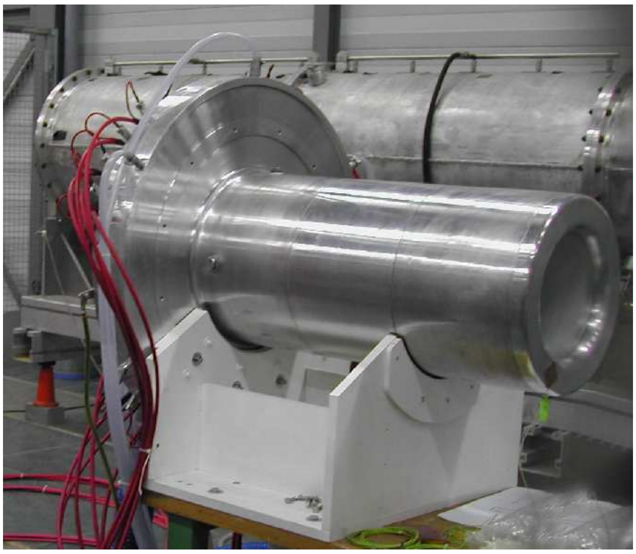

Abbildung 2: Magnetisches Doppel-Horn aus Gilardoni et al. “Status of a magnetic horn for a neutrino factory”

$$\frac{2EE_{h\nu}}{c^2} - p_{h\nu}^2 = 2\,|\vec{p}|\,|\vec{p}_{h\nu}|\cos\theta$$

wir müssen beachten, dass wir uns im Medium befinden, daher gilt $E_{h\nu} = h\nu = |\vec{p}|_{h\nu} \cdot \frac{c}{n}$, somit folgt also:

$$|\vec{p}|_{h\nu}^2 = \frac{n^2}{c^2} E_{h\nu}^2 = \frac{n^2}{c^2} h^2\nu^2$$

und mit:

$$p_{h\nu}^2 = \frac{E_{h\nu}^2}{c^2} - |\vec{p}|_{h\nu}^2 = \frac{h^2\nu^2}{c^2} - \frac{n^2h^2\nu^2}{c^2} = \frac{h^2\nu^2}{c^2}\left(1-n^2\right)$$

Einsetzen liefert:

$$\frac{Eh\nu}{c^2} - \frac{1}{2}\frac{h^2\nu^2}{c^2}\left(1-n^2\right) = |\vec{p}|\,\frac{n}{c}h\nu\cos\theta$$

und umstellen (dabei ein paar kleine Umformungen):

$$E + \frac{1}{2}h\nu\left(n^2-1\right) = |\vec{p}|\,cn\cos\theta$$

mit $|\vec{p}| = \gamma m v = \beta\gamma m c = \frac{\beta E}{c}$ folgt:

$$\begin{aligned}
\beta E n\cos\theta &= E + \frac{1}{2}h\nu\left(n^2-1\right)\\
\cos\theta &= \frac{E + \frac{1}{2}h\nu\left(n^2-1\right)}{\beta E n}\\
\cos\theta &= \frac{1}{n\beta}\left(1 + \frac{h\nu\left(n^2-1\right)}{2E}\right)
\end{aligned}$$

$\square$

8.4 (B-factories)

Die Masse der Y-Mesonen betrage $m_Y = 10.58\,\mathrm{GeV}/c^2$ (aus der Reaktion $e^+e^- \rightarrow Y\,(4S)$), die im Laborsystem ruhenden $Y\,(4S)$ zerfallen dann in ein Paar von B-Mesonen ($Y\,(4S) \rightarrow B^+B^-$) mit der Masse $m_B = 5.28\,\mathrm{GeV}/c^2$, sowie der Lebensdauer $\tau = 1.5\,\mathrm{ps}$.

a)

Wir betrachten das Laborsystem und wollen die mittlere Zerfallslänge der B-Mesonen im Laborsystem bestimmen. Es gilt wegen der Energieerhaltung für den Zerfall $Y\,(4S) \rightarrow B^+B^-$:

$$m_{Y(4S)}c^2 = 2m_Bc^2 + E_{Kin}$$

dies liefert für die kinetische Energie der B-Mesonen:

$$E_{Kin} = m_{Y(4S)}c^2 - 2m_Bc^2 = 10.58\,\mathrm{GeV} - 10.56\,\mathrm{GeV} = 0.02\,\mathrm{GeV} = 20\,\mathrm{MeV}$$

wobei wir die Annahme machen, dass jedes der Mesonen die hälfte der gesamten kinetischen Energie, also $10\,\mathrm{MeV}$ besitzt.

Mit

$$E_{kin} = (\gamma - 1)\,m_0c^2$$

und $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ folgt:

$$v = c\sqrt{1 - \left(1 + \frac{E_{kin}}{m_0c^2}\right)^{-2}}$$

wobei $m_0 = m_B = 5.28\,\mathrm{GeV}/c^2$ und $E_{Kin} = 10\,\mathrm{MeV}$ die Ein-Teilchen-kinetische Energie ist. Wir erhalten:

$$v = \sqrt{1 - \left(1 + \frac{0.01}{5.28}\right)^{-2}}\,c = 0.06146 \cdot c = 1.844 \cdot 10^7\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Unter Ausnutzung der Zerfallszeit von $\tau = 1.5\,\mathrm{ps}$ folgt für die mittlere Zerfallslänge:

$$l = v\tau = 1.844 \cdot 10^7 \cdot 1.5 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{m} = 2.766 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{m} = 0.02766\,\mathrm{mm}$$

b)

Wir wollen für die B-Mesonen nun eine mittlere Zerfallslänge von $l = 0.2\,\mathrm{mm}$ erreichen und müssen nun den Impuls bestimmen, welcher den B-Mesonen hierfür inne wohnen muss. Zuerst bestimmen wir die Geschwindigkeit (nicht relativistisch gerechnet):

$$\begin{aligned} v &= \frac{l}{\tau} \\ v &= \frac{0.2 \cdot 10^{-3}}{1.5 \cdot 10^{-12}} \, \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \\ v &= 1.333 \cdot 10^{8} \, \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \\ v &= 0.4444 \cdot c \end{aligned}$$

da v nun ca. 44,44% der Lichtgeschwindigkeit betragen würde, können wir nicht mehr nicht-relativistisch rechnen, da $\gamma = 1.1163$ für diese Geschwindigkeit und somit der Einfluss von γ signifikant ist. Wir rechnen daher relativistisch, wobei wir die Zeitdilatation für die Lebensdauer miteinbeziehen.

$$\begin{aligned} v &= \frac{l}{\gamma\tau} \\ \gamma v &= \frac{l}{\tau} \\ \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} v^2 &= \left(\frac{l}{\tau}\right)^2 \\ \frac{1}{\left(\frac{1}{v^2} - \frac{1}{c^2}\right)} &= \left(\frac{l}{\tau}\right)^2 \\ \frac{1}{v^2} &= \left(\frac{\tau}{l}\right)^2 + \frac{1}{c^2} \\ v &= \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{\tau}{l}\right)^2 + \frac{1}{c^2}}} \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich für die Geschwindigkeit:

$$v = 1.218 \cdot 10^{8} \, \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 0.4061 \cdot c$$

hieraus ergibt sich $\gamma = 1.094$. Für den Impuls der B-Mesonen ergibt sich hierfür (wobei wir $m_B = 5.28\,\mathrm{GeV}$ benutzen):

$$p_B = \gamma m v = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} v m_B = 2.347 \, \frac{\mathrm{GeV}}{\mathrm{c}}$$

Für die kinetische Energie der B-Mesonen finden wir:

$$E_{kin} = (\gamma - 1) \, m_B c^2 = 4.980 \cdot 10^{8} \, \mathrm{eV} = 0.4980 \, \mathrm{GeV}$$

c)

Da wir wissen, das die Energieerhaltung gegeben ist, können wir einfach zurückrechnen auf $Y\,(4S)$, wobei wir die Einzel-Teilchen-kinetischen Energien und die Ruhemassen addieren:

$$E_{Y(4S)} = 2E_{Kin} + 2m_B c^2 = 11.56 \, \mathrm{GeV}$$

Nun ist jedoch nicht klar, ob die B-Mesonen den gleichen Impuls besitzen werden, d.h. wir hatten in **b)** bisher nur die mittleren Impulse ausgerechnet für den Fall also, dass beide B-Mesonen den gleichen Impuls erhalten. Jetzt können wir jedoch zum Zurückrechnen auf die Energie von $Y\,(4S)$, den Zerfall von $Y\,(4S)$ in die 2 B-Mesonen benutzen. Hierbei gilt für die Vierer-Impulse aus der Vierer-Impulserhaltung:

$$p_Y = p_{B^+} + p_{B^-}$$

Umstellen liefert:

$$p_{B^+} = p_Y - p_{B^-}$$

quadrieren:

$$p_{B^+}^2 = p_Y^2 + p_{B^-}^2 - p_Y \cdot p_{B^-}$$

aus der Invarianz folgt $p_i^2 = m_{0,i}^2 c^2$, d.h.

$$m_{0,B^+}^2 c^2 = m_{0,Y}^2 c^2 + m_{0,B^-}^2 c^2 - 2\frac{E_Y E_B}{c^2} + 2\vec{p}_Y \cdot \vec{p}_{B^-}$$

mit $a \cdot b = a_0 b_0 - \vec{a} \cdot \vec{b}$. Umstellen liefert

$$E_Y = \frac{m_{0,Y}^2 c^4}{2E_B} + \frac{2\,|\vec{p}_Y|\,|\vec{p}_{B^-}|\,c^2}{2E_B}\cos\theta \tag{1}$$

mit $E_i = \gamma_i m_{0,i} c^2$, $|\vec{p}_Y|\,c = \sqrt{E_Y^2 - m_{0,Y}^2 c^4}$ und $|\vec{p}_B|\,c = \sqrt{E_B^2 - m_{0,B}^2 c^4}$ folgt:

$$E_Y = \frac{m_{0,Y}^2 c^4}{2E_B} + \frac{(\gamma_Y - 1)\,m_{0,Y} c^2\,(\gamma_B - 1)\,m_{0,B} c^2}{\gamma_B m_{0,B} c^2}\cos\theta$$

umstellen liefert die Gleichung:

$$\gamma_Y m_{0,Y} c^2 = \frac{m_{0,Y}^2 c^4}{2E_B} + \frac{(\gamma_Y - 1)\,(\gamma_B - 1)}{\gamma_B} m_{0,Y} c^2 \cos\theta$$

umstellen liefert:

$$m_{0,Y} c^2 \left[\frac{\gamma_Y - (\gamma_Y\gamma_B - \gamma_Y - \gamma_B + 1)\cos\theta}{\gamma_B}\right] - \frac{m_{0,Y}^2 c^4}{2E_B} = 0$$

dies kann man vereinfachen zu:

$$\gamma_Y m_{0,Y} c^2 = 2E_B\gamma_Y \left[\frac{\gamma_Y - (\gamma_Y\gamma_B - \gamma_Y - \gamma_B + 1)\cos\theta}{\gamma_B}\right]$$

dies ist aber gerade:

$$E_Y = 2E_B\left[\frac{\gamma_Y^2}{\gamma_B} - \gamma_Y^2\cos\theta + \frac{\gamma_Y^2}{\gamma_B}\cos\theta + \gamma_Y\cos\theta - \frac{\gamma_Y}{\gamma_B}\cos\theta\right]$$

(der Weg hat zwar zu nichts geführt, jedoch erscheint mir das Ergebnis eine elegante Gleichung zu sein, daher lasse ich sie mal stehen.)

Da in γ_Y jedoch die Geschwindigkeit von Y auftritt, welche wir nicht kennen, müssen wir weiter umstellen, ausgehend von (1), wobei wir diesmal $|\vec{p}_Y|\, c = \sqrt{E_Y^2 - m_{0,Y}^2 c^4}$ einsetzen:

$$E_Y = \frac{m_{0,Y}^2 c^4}{2E_B} + \frac{\sqrt{E_Y^2 - m_{0,Y}^2 c^4}\, |\vec{p}_{B^-}|\, c}{E_B} \cos\theta$$

da wir hierin zwei Unbekannte haben (p_B und $\cos\theta$), stellen wir erstmal um:

$$E_Y E_B - \sqrt{E_Y^2 - m_{0,Y}^2 c^4}\, |\vec{p}_{B^-}|\, c \cdot \cos\theta = \frac{1}{2} m_{0,Y}^2 c^4 \qquad (2)$$

wir wissen, dass wir als Minimum $\cos\theta = 1$ erwarten können, daher setzen wir den Wert erstmal fest (Wir gehen also von einem eindimensionalen Zerfall aus). Setzen wir $E_B = \gamma_B m_{0,B} c^2 = \gamma_B m_{0,B} v \frac{c}{\beta_B} = p_{B^-} c \frac{1}{\beta_B}$:

$$(p_{B^-} c) \left[\frac{E_Y}{\beta_B} - \cos\theta \sqrt{E_Y^2 - m_{0,Y}^2 c^4} \right] - \frac{1}{2} m_{0,Y}^2 c^4 = 0$$

jetzt geht es in *mathematica*, wir erhalten zwei Ergebnisse, welche ungefähr als Mittelwert unser vorheriges Ergebnis besitzen, wobei der Mittelwert aus den Ergebnissen $\bar{E}_Y = 11.60\,\mathrm{GeV}$ beträgt. Die Ergebnisse sind:

$$\begin{aligned} E_{Y,1} &= 11.31\,\mathrm{GeV} \\ E_{Y,2} &= 11.89\,\mathrm{GeV} \end{aligned}$$

diese stellen einen Bereich für die möglichen Energien von E_Y dar, wobei wir die Energie mimnimieren wollen, daher wählen wir $E_Y = 11.31\,\mathrm{GeV}$. (Da wir p_B aus **b)** benutzt haben, erscheint es jedoch fraglich, ob nicht noch dieser Wert variiert werden müsste, um das wirkliche Minimum zu finden, wobei zusätzlich hierdurch v_B auch variiert werden würde.)

Vergleichen wir die Ruheenergie des $Y\,(4S)$ mit der berechneten Energie, erhalten wir die kinetische Energie des $Y\,(4S)$:

$$E_{Y,Kin} = E_Y - m_Y c^2 = 11.31\,\mathrm{GeV} - 10.58\,\mathrm{GeV} = 0.73\,\mathrm{GeV}$$

d)

Zuerst bestimmen wir den Impuls des $Y\,(4S)$-Teilchen:

$$p_Y = \frac{\sqrt{E_Y^2 - m_{0,Y}^2 c^4}}{c} = 3.998\,\frac{\mathrm{GeV}}{c}$$

mit diesem Ergebnis können wir uns jetzt an die Impulse der Leptonen (Positron/Elektron) wagen, wobei wir OBdA den Impuls des e^- als antiparallel zu $Y\,(4S)$ annehmen. Es gilt dann:

$$p_{e^+} + p_{e^-} = p_Y$$

diesmal ohne große Erklärungen (äquivalent zu **c)**)

$$\begin{aligned}
p_{e^\pm} &= p_Y - p_{e^\mp} \\
p_{e^\pm}^2 &= p_Y^2 + p_{e^\mp}^2 - p_Y \cdot p_{e^\mp} \\
0 &= m_{0,Y}^2 c^2 - 2\frac{E_Y E_{e^\mp}}{c^2} + 2\vec{p}_Y \cdot \vec{p}_{e^\mp} \\
E_Y E_{e^\mp} &= \frac{1}{2} m_{0,Y}^2 c^4 + |\vec{p}_Y|\,|\vec{p}_{e^\mp}|\, c^2 \cos\theta \\
\frac{1}{2} m_{0,Y}^2 c^4 &= E_Y E_{e^\mp} - \sqrt{E_{e^\mp}^2 - m_{0,e^\mp}^2 c^4}\,|\vec{p}_Y|\, c \cos\theta
\end{aligned}$$

wir kommen also zu der (2) äquivalenten Formel:

$$E_Y E_{e^\pm} - \sqrt{E_{e^\pm}^2 - m_{0,e^\pm}^2 c^4}\,|\vec{p}_Y|\, c \cdot \cos\theta = \frac{1}{2} m_{0,Y}^2 c^4$$

diesmal ist jedoch einmal $\cos\theta = 1$ und einmal $\cos\theta = -1$, hieraus ergeben sich die Formeln:

$$\begin{aligned}
E_Y E_{e^+} - \sqrt{E_{e^+}^2 - m_{0,e^+}^2 c^4}\,|\vec{p}_Y|\, c - \frac{1}{2} m_{0,Y}^2 c^4 &= 0 \\
E_Y E_{e^-} + \sqrt{E_{e^-}^2 - m_{0,e^-}^2 c^4}\,|\vec{p}_Y|\, c - \frac{1}{2} m_{0,Y}^2 c^4 &= 0
\end{aligned}$$

Mit diesen folgt für die Energien:

$$\begin{aligned}
E_{e^+} &= 7.654\,\mathrm{GeV} \\
E_{e^-} &= 3.656\,\mathrm{GeV}
\end{aligned}$$