

7 Übungsblatt Kern und Teilchenphysik

7.1 (Kaonenzerfall)

Wir betrachten den schwachen Zerfall von Kaonen K^0 und \bar{K}^0 in 2 und 3 Pionen:

$$K^0, \bar{K}^0 \rightarrow \pi^0\pi^0, \pi^+\pi^-, \pi^+\pi^-\pi^0, \pi^0\pi^0\pi^0$$

Die Parität von K^0 ist -1 . Es ist zu zeigen, dass bei diesen Zerfällen

a)

der 2-Pionenzustand ein Eigenzustand von CP mit Eigenwert $+1$ ist.

Für die Ladungskonjugation gilt

$$\begin{aligned} C\pi^+ &= (+1) \cdot \pi^- \\ C\pi^0 &= (+1) \cdot \pi^0 \\ C\pi^- &= (+1) \cdot \pi^+ \end{aligned}$$

während für die Parität gilt:

$$\begin{aligned} P\pi^+ &= (-1) \cdot \pi^+ \\ P\pi^0 &= (-1) \cdot \pi^0 \\ P\pi^- &= (-1) \cdot \pi^- \end{aligned}$$

mit:

$$P\pi^i\pi^j = P_{\pi^i}P_{\pi^j}(-1)^l = (+1)$$

mit $i = +, j = -$ und $i = 0, j = 0$ und $l = 0$.

Hieraus folgt dann:

$$CP\pi^i\pi^j = C(+1)\pi^i\pi^j = (+1)(+1)\pi^j\pi^i = \pi^j\pi^i$$

□

somit also der Eigenwert $+1$, da

$$\pi^+\pi^- = \pi^-\pi^+$$

b)

der 3-Pionenzustand ein Eigenzustand von CP mit Eigenwert -1 ist.

Betrachten wir die Parität für den ersten Fall:

$$P\pi^+\pi^-\pi^0 = (-1)(-1)(-1)^{l_{12}}(-1)(-1)^{l_3}$$

unter der Annahme $l = 0$ und $l_{12} = 0$ folgt $l_3 = 0$, somit folgt also:

$$P\pi^+\pi^-\pi^0 = (-1)$$

Für den zweiten Fall:

$$P\pi^0\pi^0\pi^0 = (-1)(-1)(-1)(-1)^l = (-1)$$

Betrachtung der Ladungskonjugation wurde in **a)** bereits durchgeführt für die einzelnen Teilchen ($i = +, j = -, k = 0$ und $i, j, k = 0$), daher folgt:

$$CP\pi^i\pi^j\pi^k = C(-1)\pi^i\pi^j\pi^k = (-1)(+1)(+1)(+1)\pi^j\pi^i\pi^k = (-1)\pi^j\pi^i\pi^k$$

□

7.2 (Neutron-Antineutron-Oszillationen)

Wir betrachten die hypothetische Neutron-Antineutron-Oszillation. Es gilt die experimentelle Untergrenze für die Zeitskala von $\tau_{n \leftrightarrow \bar{n}} = 3 \cdot 10^6$ s. H_0 sei der nicht-ww Hamiltonian, der n und \bar{n} mischt. Für diesen gilt:

$$H_0|n\rangle = m_n c^2 |n\rangle \quad \text{bzw.} \quad H_0|\bar{n}\rangle = m_n c^2 |\bar{n}\rangle$$

für Zustände in Ruhe. H' sei nun der ww-Operator, der Übergänge zwischen n und \bar{n} erlaubt, mit:

$$H'|n\rangle = \varepsilon|\bar{n}\rangle \quad \text{bzw.} \quad H'|\bar{n}\rangle = \varepsilon|n\rangle$$

Es ist die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, zum Zeitpunkt t ein Antineutron zu beobachten, wenn das Teilchen zum Zeitpunkt $t = 0$ ein Neutron war. Zuerst müssen wir die Eigenzustände von $H = H_0 + H'$ finden, wobei Linearkombinationen aus dem Neutron- und Antineutronzustand ein sinnvoller Ansatz sind:

$$|n_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|n\rangle + |\bar{n}\rangle) \tag{1}$$

$$|n_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|n\rangle - |\bar{n}\rangle) \tag{2}$$

Wir müssen zuerst die Energieeigenwerte von H berechnen, dazu wenden wir H an:

$$\begin{aligned} H|n_1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (H|n\rangle + H|\bar{n}\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} ((H_0 + H')|n\rangle + (H_0 + H')|\bar{n}\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (m_n c^2 |n\rangle + \varepsilon|\bar{n}\rangle + m_n c^2 |\bar{n}\rangle + \varepsilon|n\rangle) \\ &= (m_n c^2 + \varepsilon) \frac{1}{\sqrt{2}} (|n\rangle + |\bar{n}\rangle) \\ &= (m_n c^2 + \varepsilon) |n_1\rangle \end{aligned}$$

und (nicht ganz so ausführlich):

$$\begin{aligned} H|n_2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(H|n\rangle - H|\bar{n}\rangle) \\ &= (m_n c^2 - \varepsilon)|n_2\rangle \end{aligned}$$

Um die Wahrscheinlichkeit zur Beobachtung eines Antineutrons zum Zeitpunkt t zu bestimmen, müssen wir zuerst (1) und (2) umstellen:

$$\begin{aligned} |n\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|n_1\rangle + |n_2\rangle) \\ |\bar{n}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|n_1\rangle - |n_2\rangle) \end{aligned}$$

jetzt können wir die Zeitentwicklung (vgl. ET 170):

$$|n_k(t)\rangle = |n_k(0)\rangle e^{-i\frac{Ht}{\hbar}}$$

mit $n_k = \bar{n}$ ansetzen:

$$\begin{aligned} |\bar{n}(t)\rangle &= |\bar{n}(0)\rangle e^{-i\frac{Ht}{\hbar}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e^{-i\frac{Ht}{\hbar}} |n_1(0)\rangle - e^{-i\frac{Ht}{\hbar}} |n_2(0)\rangle \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e^{-i\frac{(m_n c^2 + \varepsilon)t}{\hbar}} |n_1(0)\rangle - e^{-i\frac{(m_n c^2 - \varepsilon)t}{\hbar}} |n_2(0)\rangle \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\frac{m_n c^2 t}{\hbar}} \left(e^{-i\frac{\varepsilon t}{\hbar}} |n_1(0)\rangle - e^{i\frac{\varepsilon t}{\hbar}} |n_2(0)\rangle \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\frac{m_n c^2 t}{\hbar}} \left(e^{-i\frac{\varepsilon t}{\hbar}} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} (|n(0)\rangle + |\bar{n}(0)\rangle) \right] - e^{i\frac{\varepsilon t}{\hbar}} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} (|n(0)\rangle - |\bar{n}(0)\rangle) \right] \right) \\ &= \frac{1}{2} e^{-i\frac{m_n c^2 t}{\hbar}} \left(\left[e^{-i\frac{\varepsilon t}{\hbar}} - e^{i\frac{\varepsilon t}{\hbar}} \right] |n(0)\rangle + \left[e^{-i\frac{\varepsilon t}{\hbar}} + e^{i\frac{\varepsilon t}{\hbar}} \right] |\bar{n}(0)\rangle \right) \\ &= \frac{1}{2} e^{-i\frac{m_n c^2 t}{\hbar}} \left(-2i \sin\left(\frac{\varepsilon t}{\hbar}\right) |n(0)\rangle + 2 \cos\left(\frac{\varepsilon t}{\hbar}\right) |\bar{n}(0)\rangle \right) \\ &= e^{-i\frac{m_n c^2 t}{\hbar}} \left(\cos\left(\frac{\varepsilon t}{\hbar}\right) |\bar{n}(0)\rangle - i \sin\left(\frac{\varepsilon t}{\hbar}\right) |n(0)\rangle \right) \end{aligned}$$

Nun setzen wir die Randbedingung aus der Aufgabenstellung ein, dass zum Zeitpunkt $t = 0$ das Teilchen ein Neutron war, d.h. $|\bar{n}(0)\rangle = 0$:

$$|\bar{n}(t)\rangle = -i \sin\left(\frac{\varepsilon t}{\hbar}\right) e^{-i\frac{m_n c^2 t}{\hbar}} |n(0)\rangle$$

Die Wahrscheinlichkeit ergibt sich nun als:

$$P(\bar{n}, t) = |\langle \bar{n}(t) | \bar{n}(0) \rangle|^2$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \langle n(0) | i \sin\left(\frac{\varepsilon t}{\hbar}\right) e^{i \frac{m_n c^2 t}{\hbar}} | n(0) \rangle \right|^2 \\
&= \left| \sin\left(\frac{\varepsilon t}{\hbar}\right) i e^{i \frac{m_n c^2 t}{\hbar}} \langle n(0) | n(0) \rangle \right|^2 \\
&= \sin^2\left(\frac{\varepsilon t}{\hbar}\right)
\end{aligned}$$

Wenn die Wahrscheinlichkeit 50% beträgt, nennen wir diese Zeit $\tau_{n \leftrightarrow \bar{n}}$, d.h. wir können $P(\bar{n}, t) = \frac{1}{2}$ setzen und erhalten:

$$\begin{aligned}
\sin^2\left(\frac{\varepsilon \tau_{n \leftrightarrow \bar{n}}}{\hbar}\right) &= \frac{1}{2} \\
\varepsilon &= \frac{\hbar}{\tau_{n \leftrightarrow \bar{n}}} \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)
\end{aligned}$$

mit $\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4}$ gilt somit also:

$$\varepsilon = \frac{\hbar \pi}{4 \tau_{n \leftrightarrow \bar{n}}}$$

setzen wir nun $\tau_{n \leftrightarrow \bar{n}} = 3 \cdot 10^6$ s ein, so erhalten wir als experimentelle Obergrenze für ε :

$$\varepsilon_{max} = 2.76 \cdot 10^{-41} \text{ J} = 1.72 \cdot 10^{-22} \text{ eV}$$

7.3 (Elektronenstreuung an einem Teilchen)

Zu zeigen:

$$E' = \frac{E}{1 + \frac{E}{Mc^2} (1 - \cos \theta)}$$

für relativistische Elektronen. Es gilt Erhalt der Vierervektoren (Energieerhaltung, Impulserhaltung):

$$p + p_p = p' + p'_p$$

umstellen liefert:

$$p - p' = p'_p - p_p$$

quadrieren führt zu:

$$p \cdot p + p' \cdot p' - 2p \cdot p' = p'_p \cdot p'_p + p_p \cdot p_p - 2p'_p \cdot p_p$$

dies kann geschrieben werden als:

$$p \cdot p + p' \cdot p' - 2 \frac{EE'}{c^2} + 2 |\vec{p}| \cdot |\vec{p}'| \cos \theta = p'_p \cdot p'_p + p_p \cdot p_p - 2p'_p \cdot p_p$$

mit $p \cdot p = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 = \gamma^2 m^2 c^2 - \gamma^2 m^2 v^2 = m^2 c^2 \gamma^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = m^2 c^2$ (d.h. $p_p \cdot p_p = M^2 c^2$), im relativistischen Fall gilt also $p \cdot p \approx 0$. Weiter gilt $E_p = M c^2$ wegen $\vec{p}_p = 0$ (Proton/Kern vor Stoß in Ruhe), was zusätzlich zu $\vec{p}'_p \cdot \vec{p}_p = 0$ führt, somit gilt also $p'_p \cdot p_p = \frac{E_p E'_p}{c^2}$. Zusätzlich gilt noch $|\vec{p}| \approx \frac{E}{c}$ (relativistisches Elektron) und unter der Annahme, dass das Elektron nach dem Stoß noch relativistisch ist, gilt $|\vec{p}'| \approx \frac{E'}{c}$.

$$\begin{aligned} 0 + 0 - 2 \frac{E E'}{c^2} + 2 \frac{E \cdot E'}{c^2} \cos \theta &= 2 M^2 c^2 - 2 \frac{E_p E'_p}{c^2} \\ -E E' (1 - \cos \theta) &= M^2 c^4 - M c^2 E'_p \end{aligned}$$

Nun gilt jedoch die Energieerhaltung:

$$E + E_p = E' + E'_p \Rightarrow E'_p = E + E_p - E'$$

einsetzen liefert:

$$\begin{aligned} E E' (1 - \cos \theta) &= -M^2 c^4 + M c^2 (M c^2 + E - E') \\ E' \frac{E}{M c^2} (1 - \cos \theta) &= -M c^2 + M c^2 + E - E' \\ E' \frac{E}{M c^2} (1 - \cos \theta) &= E - E' \\ E' \left(1 + \frac{E}{M c^2} (1 - \cos \theta)\right) &= E \\ E' &= \frac{E}{1 + \frac{E}{M c^2} (1 - \cos \theta)} \end{aligned}$$

□

Die Betrachtung von E' für die extremalen Fälle $\theta = 0^\circ$ und $\theta = 180^\circ$ liefert:

$$\begin{aligned} E'(0) &= 10 \text{ GeV} \\ E'(180) &= 448.113 \text{ MeV} \end{aligned}$$

somit verliert das Teilchen im Fall von $\theta = 0^\circ$ gar keine Energie, wohingegen es im Fall von $\theta = 180^\circ$ ca. 95.5% seiner Energie abgibt.

Die Skizze für den Fall $E/Mc^2 = 0.5$ befindet sich in Abb. 1 und für den Fall $E/Mc^2 = 10$ befindet sich diese in Abb. 2.

7.4 (Teilchenunterscheidung)

Wir betrachten zwei Teilchentypen mit den Massen m_1 und m_2 mit dem gemeinsamen Impuls p , welche eine Strecke L zwischen zwei Szintillationszählern durchlaufen. Es ist zu zeigen, dass der Unterschied der Flugzeiten $\Delta t = t_2 - t_1$ ($t_i = t(m_i)$, $i = 1, 2$) für große Impulse mit p^{-2} abnimmt. Es gilt für die Flugzeit:

$$t = \frac{L}{v}$$

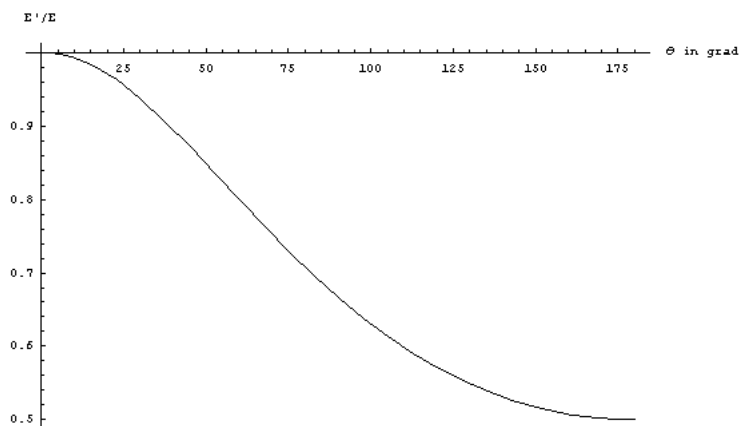


Abbildung 1: Skizze E'/E in Abhängigkeit von θ für den Fall $E/Mc^2 = 0.5$

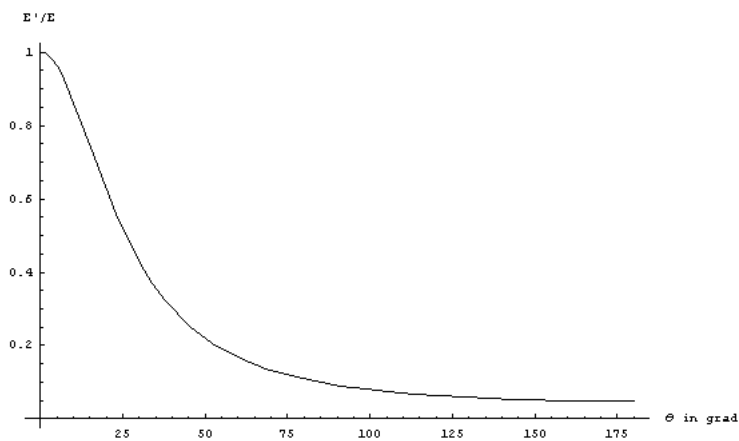


Abbildung 2: Skizze E'/E in Abhängigkeit von θ für den Fall $E/Mc^2 = 10$

Die Geschwindigkeit erhalten wir aus dem Impuls $p = v \frac{E}{c^2} \Leftrightarrow v = \frac{pc}{E} \cdot c$, mit der Energie $E = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}$:

$$v = \frac{pc}{\sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}} \cdot c = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{m^2 c^2}{p^2}}} \cdot c \Leftrightarrow \frac{1}{v} = \sqrt{1 + \frac{m^2 c^2}{p^2}} \frac{1}{c}$$

Unter der Annahme großer Impulse ist $v \approx c$, d.h. $\sqrt{1 + \frac{m^2 c^2}{p^2}} \approx 1$. Wir können also um $\left(\frac{mc}{p}\right)^2 = 0$ die Wurzel entwickeln:

$$\frac{1}{v} = \left(1 + \frac{1}{2} \frac{m^2 c^2}{p^2} \mp \mathcal{O}\left(\left(\frac{mc}{p}\right)^4\right)\right) \cdot \frac{1}{c}$$

Unter Vernachlässigung der Terme höherer Ordnung erhalten wir also für die Geschwindigkeit für große Impulse:

$$\frac{1}{v} = \left(1 + \frac{1}{2} \frac{m^2 c^2}{p^2}\right) \cdot \frac{1}{c}$$

Daraus folgt für den Unterschied der Flugzeit:

$$\begin{aligned} \Delta t &= |t_2 - t_1| \\ &= L \left| \frac{1}{v_2} - \frac{1}{v_1} \right| \\ &= L \left| \left(1 + \frac{1}{2} \frac{m_1^2 c^2}{p^2}\right) \cdot \frac{1}{c} - \left(1 + \frac{1}{2} \frac{m_2^2 c^2}{p^2}\right) \cdot \frac{1}{c} \right| \\ &= L \left| \frac{1}{2} \frac{m_1^2 c}{p^2} - \frac{1}{2} \frac{m_2^2 c}{p^2} \right| \\ &= L \left| \frac{1}{2} \frac{c}{p^2} (m_1^2 - m_2^2) \right| \\ &= \underbrace{\frac{Lc}{2}}_c |(m_1^2 - m_2^2)| \cdot p^{-2} \end{aligned}$$

Somit folgt für große Impulse:

$$\Delta t = c \cdot \frac{1}{p^2}$$

□

Es ist der minimal erforderliche Flugweg L zu bestimmen, mit dem man Pionen von Kaonen unterscheiden kann. Es gilt für den Flugweg:

$$L = \frac{2p^2 c^2}{|(m_1^2 c^4 - m_2^2 c^4)|} \cdot c \Delta t$$

Mit $\Delta t = 200$ ps, einem Impuls von $p = 3$ GeV/ c , $m_{\pi^0} = 139.57018$ MeV/ c^2 und $m_{K^0} = 497.648$ MeV/ c^2 folgt für den minimal zur Unterscheidung erforderlichen Flugweg:

$$L = 4.71 \text{ m}$$