Heiko Dumlich 29. November 2007

6 Übungsblatt Kern und Teilchenphysik

6.1 (Dipol-Dipol-Wechselwirkung)

Es ist zu zeigen, dass die Erwartungswert von

$$Q = 3\left(\vec{A}\cdot\hat{r}\right)\left(\vec{B}\cdot\hat{r}\right) - \vec{A}\cdot\vec{B}$$

in jedem kugelsymmetrischen Zustand null ist. Zuerst wollen wir jedoch einsehen, dass sich der als 0 zu zeigende Term umschreiben lässt in:

$$\langle Q\rangle = \alpha\vec{A}\cdot\vec{B}$$

Hierfür berechnen wir explizit:

$$\begin{aligned}\left(\vec{A}\cdot\hat{r}\right)\left(\vec{B}\cdot\hat{r}\right) &= (A_1e_1 + A_2e_2 + A_3e_3)(B_1e_1 + B_2e_2 + B_3e_3) \\ &= A_1B_1e_1^2 + A_1B_2e_1e_2 + A_1B_3e_1e_3 \\ &+ A_2B_1e_1e_2 + A_2B_2e_2^2 + A_2B_3e_2e_3 \\ &+ A_3B_1e_1e_3 + A_3B_2e_2e_3 + A_3B_3e_3^2\end{aligned}$$

Wir können bereits erkenne, dass sich hierin ein Teil des gesuchten Term als:

$$\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)e^2 = A_1B_1e_1^2 + A_2B_2e_2^2 + A_3B_3e_3^2$$

versteckt (insofern die Annahme $e^2 = e_1^2 = e_2^2 = e_3^2$ sich als richtig rausstellen wird). Somit gilt also:

$$Q = 3K + \left(3e^2 - 1\right)\vec{A}\cdot\vec{B}$$

mit

$$K = A_1B_2e_1e_2 + A_1B_3e_1e_3 + A_2B_1e_1e_2 + A_2B_3e_2e_3 + A_3B_1e_1e_3 + A_3B_2e_2e_3$$

Wir müssen nun zeigen, dass für den Erwartungswert $K = 0$ ist. Hierfür betrachten wir den Erwartungswert von K:

$$\langle K\rangle = \langle\psi_{nlm}|K|\psi_{nlm}\rangle$$

wir brauchen nur den Winkelanteil beachten, da hierfür bereits alle Terme verschwinden, was wir sogleich zeigen, wobei wir $L = 0$ setzen in einem kugelsymmetrischen Zustand (wir nutzen Kugelflächenfunktionen $Y_m^l(\theta,\varphi)$) und mit

$$\hat{r} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

, wobei $\hat{r}$ Einheitsvektor ist, folgt mit $Y_0^0 = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$ für $l = 0$ bei Winkelintegration. Für die einzelnen Terme:

$$\langle e_1 e_2 \rangle \propto \int_0^\pi d\theta \sin^3\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \cos\varphi \sin\varphi$$

Mit

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \cos\varphi \sin\varphi = \left[-\cos^2\varphi\right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} d\varphi \cos\varphi \sin\varphi$$

folgt nach umstellen:

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \cos\varphi \sin\varphi = \frac{1}{2}\left[-\cos^2\varphi\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2}\left[-1+1\right] = 0$$

somit also:

$$\langle e_1 e_2 \rangle = 0$$

weiter mit

$$\begin{aligned} \langle e_1 e_3 \rangle &\propto \int_0^\pi d\theta \sin^2\theta \cos\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \cos\varphi \\ &= \int_0^\pi d\theta \sin^2\theta \cos\theta \left[-\sin\varphi\right]_0^{2\pi} \\ &= 0 \end{aligned}$$

zu guter letzt:

$$\begin{aligned} \langle e_2 e_3 \rangle &\propto \int_0^\pi d\theta \sin^2\theta \cos\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \sin\varphi \\ &= \int_0^\pi d\theta \sin^2\theta \cos\theta \left[-\cos\varphi\right]_0^{2\pi} \\ &= \int_0^\pi d\theta \sin^2\theta \cos\theta \left[-1+1\right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

Somit gilt also:

$$\langle K \rangle = 0$$

und die Vorüberlegung ist abgeschlossen, es lässt sich also der Erwartungswert als:

$$\langle Q \rangle = \alpha \vec{A} \cdot \vec{B}$$

darstellen, wobei

$$\alpha = 3\left\langle e^2 \right\rangle - 1 \tag{1}$$

wir müssen also nun noch die Erwartungswerte für e_1^2, e_2^2 und e_3^2 bestimmen. Diesmal können wir die Radialanteile nicht einfach vernachlässigen, da zu erwarten ist, dass diese Terme nicht verschwinden. Für den Erwartungswert gilt also:

$$\langle A \rangle = \int_0^\infty dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi r^2 \sin\theta R^*(r)\, Y_{lm}^*(\theta,\varphi)\, AR(r)\, Y_{lm}(\theta,\varphi)$$

Benutzen wir nur die Orthonormalität:

$$\langle \psi | \psi \rangle = 1$$

und das Wissen, dass die Kugelflächenfunktionen orthonormal sind, so folgt:

$$\int_0^\infty dr\, r^2 \left| R(r) \right|^2 = 1$$

Hiermit können wir weiter rechnen $\left(|Y_{00}|^2 = \frac{1}{4\pi} \right)$, wobei wir prüfen wollen, ob $\left(e^2 = e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 \right)$ gilt:

$$\begin{aligned}
\left\langle e_1^2 \right\rangle = \left\langle \sin^2\theta \cos^2\varphi \right\rangle &= \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi d\theta \sin^3\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \cos^2\varphi \\
\left\langle e_2^2 \right\rangle = \left\langle \sin^2\theta \sin^2\varphi \right\rangle &= \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi d\theta \sin^3\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \sin^2\varphi \\
\left\langle e_3^2 \right\rangle = \left\langle \cos^2\theta \right\rangle &= \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi d\theta \sin\theta \cos^2\theta \int_0^{2\pi} d\varphi
\end{aligned}$$

Einzelnes lösen der Integrale:

$$\int_0^\pi d\theta \sin^3\theta = \int_{-1}^1 d\cos\theta \left(1 - \cos^2\theta\right) = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

Das nächste Integral lösen wir mit Hilfe von $\cos 2\varphi = 2\cos^2\varphi - 1 \Rightarrow \cos^2\varphi = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\varphi)$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \cos^2\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{1}{2}(1 + \cos 2\varphi) = \frac{1}{2}\left[\varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right]_0^{2\pi} = \pi$$

Für das nächste Integral nutzen wir $\cos 2\varphi = 1 - 2\sin^2\varphi \Rightarrow \sin^2\varphi = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\varphi)$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \sin^2\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{1}{2}(1 - \cos 2\varphi) = \frac{1}{2}\left[\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right]_0^{2\pi} = \pi$$

Nun noch das letzte Integral:

$$\int_0^\pi d\theta \sin\theta \cos^2\theta = \int_{-1}^1 d\cos\theta \cos^2\theta = \left[\frac{1}{3}\cos^3\theta\right]_{\cos\theta=-1}^{\cos\theta=1} = \frac{2}{3}$$

Insgesamt liefert das:

$$\begin{aligned}
\left\langle \sin^2\theta\cos^2\varphi \right\rangle &= \frac{1}{4\pi}\frac{4}{3}\pi = \frac{1}{3} \\
\left\langle \sin^2\theta\sin^2\varphi \right\rangle &= \frac{1}{4\pi}\frac{4}{3}\pi = \frac{1}{3} \\
\left\langle \cos^2\theta \right\rangle &= \frac{1}{4\pi}\frac{2}{3}2\pi = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Dies zeigt tatsächlich, dass e^2 für alle Komponenten gleich ist und bestätigt im nachhinein die Annahme. Eingesetzt in (1):

$$\alpha = 3 \cdot \frac{1}{3} - 1 = 0$$

und zusätzlich folgt hiermit gleich das gesuchte:

$$\langle Q \rangle = 0$$

$\square$

6.2 (Λ^0-Teilchen)

Es ist zu zeigen, dass die Spin-Flavourwellenfunktion des Λ^0 im Spin-up Zustand lautet:

$$\begin{aligned}
|\Lambda^0 : \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{12}}\Big\{u(\uparrow)\,d(\downarrow)\,s(\uparrow) + d(\downarrow)\,s(\uparrow)\,u(\uparrow) + s(\uparrow)\,u(\uparrow)\,d(\downarrow) \\
&+ (-1)\cdot u(\downarrow)\,d(\uparrow)\,s(\uparrow) - d(\uparrow)\,s(\uparrow)\,u(\downarrow) - s(\uparrow)\,u(\downarrow)\,d(\uparrow) \\
&+ d(\downarrow)\,u(\uparrow)\,s(\uparrow) + u(\uparrow)\,s(\uparrow)\,d(\downarrow) + s(\uparrow)\,d(\downarrow)\,u(\uparrow) \\
&+ (-1)\cdot d(\uparrow)\,u(\downarrow)\,s(\uparrow) - u(\downarrow)\,s(\uparrow)\,d(\uparrow) - s(\uparrow)\,d(\uparrow)\,u(\downarrow)\Big\}
\end{aligned}$$

Wir können dies umschreiben, indem wir die Spin- und Flavourwellenfunktionen voneinander trennen:

$$\begin{aligned}
|\Lambda^0 : \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{12}}\Big\{\uparrow\downarrow\uparrow(uds - sud + sdu - dus) \\
&+ \downarrow\uparrow\uparrow(dsu - uds + dus - usd) \\
&+ \uparrow\uparrow\downarrow(sud - dsu + usd - sdu)\Big\}
\end{aligned}$$

Dies lässt sich auch schreiben als:

$$
\begin{aligned}
|\Lambda^0 : \frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{12}}\Big\{ \uparrow\downarrow\uparrow (uds - dus + sdu - sud) \\
&- \downarrow\uparrow\uparrow (uds - dus + usd - dsu) \\
&- \uparrow\uparrow\downarrow (sdu - sud + dsu - usd) \Big\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{12}}\Big\{ (\uparrow\downarrow\uparrow - \downarrow\uparrow\uparrow) (uds - dus) \\
&+ (\downarrow\uparrow\uparrow - \uparrow\uparrow\downarrow) (dsu - usd) \\
&+ (\uparrow\downarrow\uparrow - \uparrow\uparrow\downarrow) (sdu - sud) \Big\}
\end{aligned}
$$

Da jeweils $uds \leftrightarrow dus$, $dsu \leftrightarrow usd$ und $sdu \leftrightarrow sud$ antisymmetrisch unter Vertauschung reagieren, sind diese antisymmetrisch, jedoch sind zusätzlich $\uparrow\downarrow\uparrow\leftrightarrow\downarrow\uparrow\uparrow$, $\downarrow\uparrow\uparrow\leftrightarrow\uparrow\uparrow\downarrow$und $\uparrow\downarrow\uparrow\leftrightarrow\uparrow\uparrow\downarrow$ aus antisymmetrisch. Das heisst die Flavourfunktionen und die Spinfunktionen sind antisymmetrisch, da diese jedoch die Spin-Flavourwellenfunktion ausmachen, muss die Spin-Flavourwellenfunktion symmetrisch sein.

Es sind nun der Spinoperator $\hat{S}_z$ und der Isospinoperator $\hat{I}_z$ auf die Spin-Flavourwellenfunktion anzuwenden und zu zeigen, dass $S_z = \frac{1}{2}$ und $I_3 = 0$ gilt. Anwendung des Spinoperators ($\hat{S}_z = \hat{S}_{1z} + \hat{S}_{2z} + \hat{S}_{3z}$ mit den Eigenwerten $\hat{S}_{iz} \uparrow = \frac{1}{2}$ und $\hat{S}_{iz} \downarrow = -\frac{1}{2}$)liefert:

$$
\begin{aligned}
\hat{S}_z|\Lambda^0 : \frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{12}}\Big\{ \Big(\hat{S}_{1z} + \hat{S}_{2z} + \hat{S}_{3z}\Big) \uparrow\downarrow\uparrow (uds - sud + sdu - dus) \\
&+ \Big(\hat{S}_{1z} + \hat{S}_{2z} + \hat{S}_{3z}\Big) \downarrow\uparrow\uparrow (dsu - uds + dus - usd) \\
&+ \Big(\hat{S}_{1z} + \hat{S}_{2z} + \hat{S}_{3z}\Big) \uparrow\uparrow\downarrow (sud - dsu + usd - sdu) \Big\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{12}}\Big\{ \frac{1}{2}(1 - 1 + 1) \uparrow\downarrow\uparrow (uds - sud + sdu - dus) \\
&+ \frac{1}{2}(-1 + 1 + 1) \downarrow\uparrow\uparrow (dsu - uds + dus - usd) \\
&+ \frac{1}{2}(1 + 1 - 1) \uparrow\uparrow\downarrow (sud - dsu + usd - sdu) \Big\} \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{12}}\Big\{ \uparrow\downarrow\uparrow (uds - sud + sdu - dus) \\
&+ \downarrow\uparrow\uparrow (dsu - uds + dus - usd) \\
&+ \uparrow\uparrow\downarrow (sud - dsu + usd - sdu) \Big\} \\
&= \frac{1}{2}|\Lambda^0 : \frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle
\end{aligned}
$$

d.h. $S_z = \frac{1}{2}$. Anwendung von $\hat{I}_z$ liefert (mit Hilfe von ET 67, wissen wir, dass $\hat{I}_z u = \frac{1}{2}$, $\hat{I}_z d = -\frac{1}{2}$ und $\hat{I}_z s = 0$, zusätzlich gilt wieder $\hat{I}_z = \hat{I}_{1z} + \hat{I}_{2z} + \hat{I}_{3z}$):

$$
\begin{aligned}
\hat{I}_z|\Lambda^0:\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{12}}\Big\{(\uparrow\downarrow\uparrow-\downarrow\uparrow\uparrow)\left(\left(\hat{I}_{1z}+\hat{I}_{2z}+\hat{I}_{3z}\right)uds-\left(\hat{I}_{1z}+\hat{I}_{2z}+\hat{I}_{3z}\right)dus\right)\\
&+ (\downarrow\uparrow\uparrow-\uparrow\uparrow\downarrow)\left(\left(\hat{I}_{1z}+\hat{I}_{2z}+\hat{I}_{3z}\right)dsu-\left(\hat{I}_{1z}+\hat{I}_{2z}+\hat{I}_{3z}\right)usd\right)\\
&+ (\uparrow\downarrow\uparrow-\uparrow\uparrow\downarrow)\left(\left(\hat{I}_{1z}+\hat{I}_{2z}+\hat{I}_{3z}\right)sdu-\left(\hat{I}_{1z}+\hat{I}_{2z}+\hat{I}_{3z}\right)sud\right)\Big\}\\
&= \frac{1}{\sqrt{12}}\Big\{(\uparrow\downarrow\uparrow-\downarrow\uparrow\uparrow)\left(\frac{1}{2}(1-1+0)\,uds-\frac{1}{2}(-1+1+0)\,dus\right)\\
&+ (\downarrow\uparrow\uparrow-\uparrow\uparrow\downarrow)\left(\frac{1}{2}(-1+0+1)\,dsu-\frac{1}{2}(1+0-1)\,usd\right)\\
&+ (\uparrow\downarrow\uparrow-\uparrow\uparrow\downarrow)\left(\frac{1}{2}(0-1+1)\,sdu-\frac{1}{2}(0+1-1)\,sud\right)\Big\}\\
&= 0
\end{aligned}
$$

es gilt also tatsächlich $I_3 = 0$. Es ist nun mit Hilfe von Aufsteigeoperatoren S_+ ($S_+\uparrow = 0$ und $S_+\downarrow = \uparrow$) und I_+ ($I_+u = \frac{1}{2} = d$, $I_+d = \frac{3}{2}$, $I_+s = 1$, da jedoch weder $\frac{3}{2}$ noch 1 zu einem Quark führen, verschwindet der Anteil, auf den diese angewandt wurden) zu zeigen, dass die gefundenen Werte für S_z und I_z maximal möglich sind und somit $S = \frac{1}{2}$ und $I = 0$ folgt. Beginnen wir mit S_+:

$$
\begin{aligned}
\hat{S}_+|\Lambda^0:\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{12}}\Big\{\left(\hat{S}_{1+}+\hat{S}_{2+}+\hat{S}_{3+}\right)\uparrow\downarrow\uparrow(uds-sud+sdu-dus)\\
&+ \left(\hat{S}_{1+}+\hat{S}_{2+}+\hat{S}_{3+}\right)\downarrow\uparrow\uparrow(dsu-uds+dus-usd)\\
&+ \left(\hat{S}_{1+}+\hat{S}_{2+}+\hat{S}_{3+}\right)\uparrow\uparrow\downarrow(sud-dsu+usd-sdu)\Big\}\\
&= \frac{1}{\sqrt{12}}\Big\{(0+\uparrow\uparrow\uparrow+0)\,(uds-sud+sdu-dus)\\
&+ (\uparrow\uparrow\uparrow+0+0)\,(dsu-uds+dus-usd)\\
&+ (0+0+\uparrow\uparrow\uparrow)\,(sud-dsu+usd-sdu)\Big\}\\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{12}}\Big\{\uparrow\uparrow\uparrow(uds-uds-sud+sud+sdu-sdu)\\
&+ \uparrow\uparrow\uparrow(-dus+dus+dsu-dsu-usd+usd)\Big\}\\
&= 0
\end{aligned}
$$

und I_+:

$$
\begin{aligned}
\hat{I}_+|\Lambda^0 : \frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{12}}\Big\{ (\uparrow\downarrow\uparrow - \downarrow\uparrow\uparrow) \left(\left(\hat{I}_{1+} + \hat{I}_{2+} + \hat{I}_{3+}\right) uds - \left(\hat{I}_{1+} + \hat{I}_{2+} + \hat{I}_{3+}\right) dus\right) \\
&+ (\downarrow\uparrow\uparrow - \uparrow\uparrow\downarrow) \left(\left(\hat{I}_{1+} + \hat{I}_{2+} + \hat{I}_{3+}\right) dsu - \left(\hat{I}_{1+} + \hat{I}_{2+} + \hat{I}_{3+}\right) usd\right) \\
&+ (\uparrow\downarrow\uparrow - \uparrow\uparrow\downarrow) \left(\left(\hat{I}_{1+} + \hat{I}_{2+} + \hat{I}_{3+}\right) sdu - \left(\hat{I}_{1+} + \hat{I}_{2+} + \hat{I}_{3+}\right) sud\right) \Big\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{12}}\Big\{ (\uparrow\downarrow\uparrow - \downarrow\uparrow\uparrow) (dds + 0 + 0 - (0 + dds + 0)) \\
&+ (\downarrow\uparrow\uparrow - \uparrow\uparrow\downarrow) ((0 + 0 + dsd) - (dsd + 0 + 0)) \\
&+ (\uparrow\downarrow\uparrow - \uparrow\uparrow\downarrow) ((0 + 0 + sdd) - (0 + sdd + 0)) \Big\} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Somit sind also die maximal möglichen Werte $S_z = \frac{1}{2}$ und $I_3 = 0$, daraus folgt $S = \frac{1}{2}$ und $I = 0$. Es bleibt das magnetische Moment zu bestimmen. Mit (ET 100)

$$\vec{\mu} = \vec{\mu}_1 + \vec{\mu}_2 + \vec{\mu}_3$$

$\vec{\mu}_i = \frac{e_i}{m_i}\vec{S}_i$ und $|\vec{\mu}_i| = \frac{|e_i|\hbar}{2m_i} \Rightarrow \mu_i = \frac{e_i\hbar}{2m_i}$. Für die uds Quarks gilt:

$$\mu_u = \frac{2}{3}\frac{e\hbar}{2m_u}, \quad \mu_d = -\tfrac{1}{3}\tfrac{e\hbar}{2m_d}, \quad \mu_s = -\frac{1}{3}\frac{e\hbar}{2m_s}$$

und

$$\mu_B = \langle B|\vec{\mu}|B\rangle = \frac{2}{\hbar}\left\langle B|\sum_i \mu_i S_{iz}|B\right\rangle$$

Wir können die Spin-Flavourwellenfunktion von Λ^0 im Spin-up Zustand etwas eleganter aufschreiben:

	$\uparrow\downarrow\uparrow$	$\downarrow\uparrow\uparrow$	$\uparrow\uparrow\downarrow$
uds	1	−1	0
dsu	0	1	−1
sud	−1	0	1
dus	−1	1	0
usd	0	−1	1
sdu	1	0	−1

Weiterhin wollen wir die Orthogonalität der Spin-Flavourwellenfunktionen ausnutzen, d.h. die einzelnen Anteile der Spin-Flavourwellenfunktion liefern nur mit sich selbst einen von 0 verschiedenen Wert. Betrachten wir beispielhaft den ersten Term:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{12}\frac{2}{\hbar}\left\langle u(\uparrow)\, d(\downarrow)\, s(\uparrow)\,|\sum_i \mu_i S_{iz}|u(\uparrow)\, d(\downarrow)\, s(\uparrow)\right\rangle &= \frac{1}{12}\frac{2}{\hbar}\left(\mu_u\frac{\hbar}{2} - \mu_d\frac{\hbar}{2} + \mu_s\frac{\hbar}{2}\right) \\
&= \frac{1}{12}(\mu_u - \mu_d + \mu_s)
\end{aligned}
$$

Jetzt können wir mit diesem Wissen unsere Tabelle füllen, indem wir sie auf die Anwendung dieser Operation umschreiben, wobei wir beachten, dass wir "sandwichen", d.h. die negativen Vorzeichen ($(-1) \cdot (-1) = 1$) verschwinden:

$\langle \ldots \vert \frac{2}{\hbar} \sum_i \mu_i S_{iz} \vert \ldots \rangle$	$\uparrow\downarrow\uparrow$	$\downarrow\uparrow\uparrow$	$\uparrow\uparrow\downarrow$
uds	$\mu_u - \mu_d + \mu_s$	$-\mu_u + \mu_d + \mu_s$	0
dsu	0	$-\mu_d + \mu_s + \mu_u$	$\mu_d + \mu_s - \mu_u$
sud	$\mu_s - \mu_u + \mu_d$	0	$\mu_s + \mu_u - \mu_d$
dus	$\mu_d - \mu_u + \mu_s$	$-\mu_d + \mu_u + \mu_s$	0
usd	0	$-\mu_u + \mu_s + \mu_d$	$\mu_u + \mu_s - \mu_d$
sdu	$\mu_s - \mu_d + \mu_u$	0	$\mu_s + \mu_d - \mu_u$

Um μ_{Λ^0} zu erhalten müssen wir nun nur alle Tabellenelemente summieren:

$$
\begin{aligned}
\mu_{\Lambda^0} &= \left\langle \Lambda^0 \vert \frac{2}{\hbar} \sum_i \mu_i S_{iz} \vert \Lambda^0 \right\rangle \\
&= \frac{1}{12} \left\langle \ldots \vert \frac{2}{\hbar} \sum_i \mu_i S_{iz} \vert \ldots \right\rangle \\
&= \frac{1}{12} \Big(\mu_u - \mu_d + \mu_s - \mu_u + \mu_d + \mu_s \\
&+ (-1)\, \mu_d + \mu_s + \mu_u + \mu_d + \mu_s - \mu_u \\
&+ \mu_s - \mu_u + \mu_d + \mu_s + \mu_u - \mu_d \\
&+ \mu_d - \mu_u + \mu_s - \mu_d + \mu_u + \mu_s \\
&+ (-1)\, \mu_u + \mu_s + \mu_d + \mu_u + \mu_s - \mu_d \\
&+ \mu_s - \mu_d + \mu_u + \mu_s + \mu_d - \mu_u \Big) \\
&= \frac{1}{12} (12 \mu_s) \\
&= \mu_s
\end{aligned}
$$

Der Vergleich mit der Literatur (ET 103) bestätigt das Ergebnis.

6.3 (Positronium)

Wir betrachten Positronium

$$e^+ e^- \to n \cdot \gamma$$

welches instabil ist und daher in eine fest Anzahl von Gammaquanten zerfällt. Die Anzahl wird über den Zustand bestimmt, $n = 2$ für ${}^1S_0$-Parapositronum und $n = 3$ für ${}^3S_1$-Orthopositronium. In $n = 1$ kann es auf Grund der Impulserhaltung nicht zerfallen. Es ist für ein Elektron-Positronsystem mit definiertem Bahn- und Drehimpuls zu zeigen:

$$C = (-1)^{l+s}$$

hierzu überlegen wir uns, dass Fermion-Antifermionzustände Eigenzustände von C bilden können. Wir betrachten nun den Fall der Parität, wenn wir uns ein Positron-Elektronenpaar im Raum vorstellen, dann ist C äquivalent zu P, da bei Anwendung von P die Teilchen getauscht werden, wobei $Ce^+ = e^-$ und umgekehrt gilt. Wir können also schreiben:

$$C|e^+e^-\rangle = P|e^+e^-\rangle$$

mit der Definition der Parität für Mehrteilchensysteme:

$$P_{e^+e^-} = P_{e^+}P_{e^-}(-1)^l$$

und da die Paritäten von e^+ und e^- entgegengesetzt sind:

$$P_{e^+e^-} = (-1)^{l-1}$$

Betrachten wir nun den Einfluss der Spinfunktion. Für den Fall $S = 1$ sind die Spins parallel ausgerichtet und es besteht somit kein Einfluss auf die Paritätsoperation (symmetrische Spinfunktion). Für den Fall $S = 0$ jedoch, erhalten wir verschiedene Spinausrichtungen der Teilchen, somit wird also bei Parität eine -1 erzeugt (antisymmetrische Spinfunktion). Fügen wir diese Erkenntnisse zusammen:

$$P = (-1)^{l-1}(-1)^{s+1} = (-1)^{l+s}$$

Es bleibt zu zeigen, dass P und C kommutieren, d.h. die selben Eigenzustände besitzen. Dies folgt jedoch direkt aus der CP-Invarianz. Daher gilt:

$$C = (-1)^{l+s}$$

Es ist nun noch zu zeigen, das auf Grund des C-Erhalts in der elektromagnetischen Wechselwirkung Parapositronium in $n = 2$ und Orthopositronium in $n = 3$ γ's zerfällt. Die Annhihilation erfordert Overlap der Elektron- und Positron-Wellenfunktionen, d.h. diese findet nur im S-Zustand, d.h. $l = 0$ statt. Weiterhin wissen wir, dass für Parapositronium $^1S_0$, d.h. $s = 0$ und für Orhtopositronium $^3S_1$, d.h. $s = 1$ ist. Setzen wir dies ein, erhalten wir:

$$C_{para} = (-1)^0 = 1$$

und

$$C_{ortho} = (-1)^1 = -1$$

Auf Grund des C-Erhalts müssen vor und nach dem Zerfall C gleich sein. mit $C\gamma = -1$ folgt also für den Para-Fall $n = 2$ und für den Ortho-Fall $n = 3$ als kleinst möglicher und wahrscheinlichster Zerfall.

6.4 (Mesonenmassenformel)

Es ist zu zeigen:

$$(m_\rho - m_\pi) = \frac{m_s}{m_u}(m_{K^*} - m_K)$$

mit $m_u = m_d = 310$ MeV/c^2 und $m_s = 483$ MeV/c^2.
Massenformel für Mesonen:

$$m_{q\bar{q}} = m_q + m_{\bar{q}} + \Delta m$$

Aus der Vorlesung (s. ET 76) kennen wir

$$\Delta m = \begin{cases} -3 \cdot \frac{k_{q\bar{q}}}{m_q m_{\bar{q}}} & , J^P = 0^- \\ 1 \cdot \frac{k_{q\bar{q}}}{m_q m_{\bar{q}}} & , J^P = 1^- \end{cases}$$

mit $k = \frac{8\hbar^3}{9c^3} \cdot \pi\alpha_s \left|\psi(0)\right|^2$.
Wir betrachten die folgenden Teilchen:

Teilchen	Quarks	Masse in MeV/c^2	J^P
ρ^+	$u\bar{d}$	776	1^-
π^+	$u\bar{d}$	138	0^-
K^{+*}	$u\bar{s}$	892	1^-
K^+	$u\bar{s}$	496	0^-

Für unsere Teilchen ergeben sich somit die folgenden Formeln, wobei wir k für diese Fälle als identisch annehmen:

$$\begin{aligned} m_{\rho^+} &= 2m_u + \frac{k}{m_u^2} \\ m_{\pi^+} &= 2m_u - 3\frac{k}{m_u^2} \\ m_{K^{+*}} &= m_u + m_s + \frac{k}{m_u m_s} \\ m_{K^+} &= m_u + m_s - 3\frac{k}{m_u m_s} \end{aligned}$$

Ziehen wir die zweite von der ersten und die vierte von der dritten Gleichung ab, so folgt:

$$\begin{aligned} \left(m_{\rho^+} - m_{\pi^+}\right) &= 4\frac{k}{m_u^2} \\ \left(m_{K^{+*}} - m_{K^+}\right) &= 4\frac{k}{m_u m_s} \end{aligned}$$

Division der ersten durch die zweiten Gleichung liefert:

$$\frac{\left(m_{\rho^+} - m_{\pi^+}\right)}{\left(m_{K^{+*}} - m_{K^+}\right)} = \frac{m_u}{m_s}$$

Daraus folgt

$$\left(m_\rho - m_\pi\right) = \frac{m_s}{m_u}\left(m_{K^*} - m_K\right)$$

□

Für m_s/m_u ergibt sich mit Hilfe der gemessenen Mesonenmassen:

$$\frac{m_s}{m_u} = \frac{\left(m_\rho - m_\pi\right)}{\left(m_{K^*} - m_K\right)} = \frac{776 - 138}{892 - 496} = \frac{638}{396} \approx 1.611$$

Vergleich mit den “Literaturwerten” für die Quarkmassen:

$$\left.\frac{m_s}{m_u}\right|_{lit} = 1.5581$$

Somit stimmen diese mit unter 5% Fehler überein.