Heiko Dumlich 22. November 2007

5 Übungsblatt Kern und Teilchenphysik

5.1 (Λ^0 und π^+)

Wir betrachten das Spektrum der invarianten Masse von Λ^0 und π^+. Es wurde ein Peak bei 1385 MeV der Breite 50 MeV für die Reaktion

$$K^- + p \rightarrow Y_1^* + \pi^- \rightarrow \Lambda^0 + \pi^+ + \pi^-$$

beobachtet. Diese Resonanz wird Y_1^* genannt. Zuerst bestimmen wir die Quarks der einzelnen Teilchen:

Teilchen	Quarks
K^-	s$\bar{\text{u}}$
p	uud
Λ^0	uds
π^+	ud
π^-	d$\bar{\text{u}}$

Jetzt gucken wir uns die Eigenschaften der Quarks an:

Quark	B	Y	Q	I_3	I
d	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
u	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
s	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	0
c	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	0
b	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	0
t	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	0

Hieraus folgt dann für die auftretenden Teilchen:

Teilchen	Quarks	B	Y	Q	I_3	I	S
K^-	s$\bar{\text{u}}$	0	-1	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1
p	uud	1	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	0
Λ^0	uds	1	0	0	0	1	-1
π^+	ud	0	0	1	1	1	0
π^-	d$\bar{\text{u}}$	0	0	-1	-1	1	0

a)

Wir betrachten die Reaktion:

$$K^- + p \rightarrow Y_1^* + \pi^- \rightarrow \Lambda^0 + \pi^+ + \pi^-$$

in Quarks:

$$\text{s}\bar{\text{u}} + \text{uud} \rightarrow \text{uus} + \text{d}\bar{\text{u}} \rightarrow \text{uds} + \text{u}\bar{\text{d}} + \text{d}\bar{\text{u}}$$

Aus den Erhaltungsgesetzen folgt für Y_1^* die Quarkkombination uus. Für diese können wir nun die Seltsamkeit, Hyperladung und den Isospin bestimmen:

Seltsamkeit: $S = -1$
Hyperladung: $Y = B + S$ mit $S = -1$ und $B = 1$ folgt $Y = 0$.
Isospin: $I_3 = \frac{1}{2}(N_u - N_d) = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$
zudem: $I = 1$ (da wir 2 u quarks besitzen, die jeweils $\frac{1}{2}$ beitragen und 1 s quark, das 0 beiträgt.)

Die Ladung von Y_1^* folgt aus der Ladungserhaltung und ist daher positiv: $Q = 1$, gleichzeitig kann man dies auch aus den Quarks ablesen, hierbei ergibt sich die Ladung von $Q = 2 \cdot \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = 1$. Wir können durch nachschlagen im Particle Physics Booklet das Teilchen als: Σ^+ identifizieren, welches im Booklet mit folgenden Eigenschaften angegeben wird:

$$\begin{aligned} \Sigma(1385)^+ : m &= 1382.8 \pm 0.4\,\text{MeV} \\ \Gamma &= 35.8 \pm 0.8\,\text{MeV} \\ S &= -1 \\ I &= 1 \\ \Sigma^+ &= \text{uus} \end{aligned}$$

Über die antiproportionale Verbindung ($\Gamma \propto \frac{1}{\tau}$) von Bandbreite und Lebensdauer folgt für diese hohe Bandbreite eine sehr kurze Lebensdauer. Daher ist davon auszugehen, dass nur starke Zerfallsmoden auftreten werden.

b)

Es sei $\Lambda^0 + \pi^+$ als Zerfallsprodukt von Y_1^* in einem p-Zustand des Bahndrehimpulses, d.h. $l = 1$. Die möglichen Spinzuordnungen für Y_1^* sind daher mit Hilfe von $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ zu bestimmen. Es gilt Drehimpulserhaltung, da für das Produkt $l = 1$ und $s = \frac{1}{2}$ gilt, ist hier $J = \frac{3}{2}$, daher gilt auch für Y_1^*: $J = \frac{3}{2}$.

Um die intrinsische Parität zu bestimmen, beachten wir, dass die Parität erhalten sein muss beim Zerfall:

$$Y_1^* \rightarrow \Lambda^0 + \pi^+$$

d.h.

$$P_{in} = P_{fi}$$

mit

$$P_{in} = P_{\Sigma^+}$$

und

$$P_{fi} = P_{\Lambda^0} \cdot P_{\pi^+} \cdot (-1)^{l_{\Lambda^0\pi^+}} = -1 \cdot (-1)^1 = +1$$

wobei $P_{\Lambda^0} = +1$, $P_{\pi^+} = -1$ und $l = 1$ gilt. Einsetzen liefert also:

$$P_{\Sigma^+} = +1$$

Dies wird bestätigt durch das Particle Physics Booklet, welche diese mit $J^P = \frac{3}{2}^+$ angibt.

c)

Neben dem hauptsächlich auftretenden Zerfall:

$$\Sigma^+ \rightarrow \Lambda^0 + \pi^+$$

ist noch folgender weiterer Zerfall zu erwarten:

$$\Sigma^+ \quad \rightarrow \quad \Sigma^0 + \pi^+$$

In Quarks:

$$\mathrm{uus} \quad \rightarrow \quad \mathrm{uds} + \mathrm{u\bar{d}}$$

Es sind nur starke Zerfälle möglich, da die Lebensdauer des Zustandes sehr kurz ist.

Der Zerfall:

$$\Sigma^+ \rightarrow p + \bar{K}^0$$

in Quarks:

$$\mathrm{uus} \quad \rightarrow \quad \mathrm{uud} + \mathrm{s\bar{d}}$$

ist aus Quarksicht möglich. Jedoch müssen zusätzlich noch energetische Betrachtungen gemacht werden. Da Σ^+ (1385) bereits ein sehr leichtes Meson ist, sind energetisch die Zerfälle stark limitiert. Die Masse des Protons ist mit 938 MeV und die des anti Kaons mit 498 MeV gegeben, rechnet man diese zusammen, folgt für die Energiebetrachtung:

$$1385\,\mathrm{MeV} \rightarrow 1436\,\mathrm{MeV}$$

Dies ist jedoch nicht möglich ! Daher tritt dieser Zerfall nicht auf.

5.2 (Pion-Nukleon System)

Für ein Pion-Nukleon System existieren 6 Ladungszustände: $\pi^+p, \pi^-p, \pi^0p, \pi^+n, \pi^-n, \pi^0n$. Der Isospin des Nukleons beträgt $\frac{1}{2}$, der des Pions 1. Wir können hieraus ein Isospin Quartett und ein Isospin Dublett bilden. Wobei der Zustand mit $I^{TOT} = \frac{3}{2}$ und $I_3^{TOT} = \frac{3}{2}$, d.h. $|\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\rangle$ gleich $|\pi^+p\rangle$ ist. Der Zustand $|\pi^+p\rangle$ ist das Produkt der Isospin Zustände von π^+ und p mit $|\pi^+p\rangle = |11\rangle|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle$, wobei die erste zahl der gesamte Isospin und die zweite Zahl I_3 darstellt. Daher gilt offenbar:

$$|\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\rangle = |\pi^+p\rangle = |11\rangle|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle$$

Wir wollen nun hiervon ausgehend mit Hilfe der I_--Operatoren die anderen Zustände erzeugen.

Definition I_-:

$$I_- = I_{1-} + I_{2-}$$

mit:

$$\begin{aligned}
I_-|I,I_3\rangle &= \sqrt{(I+I_3)\,(I-I_3+1)}|I,I_3-1\rangle \\
I_{1-}|I_1,I_{1,3}\rangle &= \sqrt{(I_1+I_{1,3})\,(I_1-I_{1,3}+1)}|I_1,I_{1,3}-1\rangle \\
I_{2-}|I_2,I_{2,3}\rangle &= \sqrt{(I_2+I_{2,3})\,(I_2-I_{2,3}+1)}|I_2,I_{2,3}-1\rangle
\end{aligned}$$

Wir wenden den Operator auf beide Seiten an und finden:

$$\begin{aligned}
I_-|\frac{3}{2},\frac{3}{2}\rangle &= I_{1-}|11\rangle_1|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle_2 + I_{2-}|11\rangle_1|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle_2 \\
\sqrt{\left(\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\right)\left(\frac{3}{2}-\frac{3}{2}+1\right)}|\frac{3}{2},\frac{1}{2}\rangle &= \sqrt{2}|10\rangle_1|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle_2 + \sqrt{1}|11\rangle_1|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle_2 \\
\sqrt{3}|\frac{3}{2},\frac{1}{2}\rangle &= \sqrt{2}|10\rangle_1|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle_2 + \sqrt{1}|11\rangle_1|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle_2 \\
|\frac{3}{2},\frac{1}{2}\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}}|10\rangle_1|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle_2 + \sqrt{\frac{1}{3}}|11\rangle_1|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle_2 \\
|\frac{3}{2},\frac{1}{2}\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}}|\pi^0 p\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}|\pi^+ n\rangle
\end{aligned}$$

weiter geht es mit:

$$\begin{aligned}
I_-|\frac{3}{2},\frac{1}{2}\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}}I_{1-}|10\rangle_1|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle_2 + \sqrt{\frac{1}{3}}I_{1-}|11\rangle_1|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle_2 \\
&+ \sqrt{\frac{2}{3}}I_{2-}|10\rangle_1|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle_2 + \sqrt{\frac{1}{3}}I_{2-}|11\rangle_1|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle_2 \\
\sqrt{\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}+1\right)}|\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}}I_{1-}|10\rangle_1|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle_2 + \sqrt{\frac{1}{3}}I_{1-}|11\rangle_1|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle_2 \\
&+ \sqrt{\frac{2}{3}}I_{2-}|10\rangle_1|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle_2 + 0 \\
2|\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{2}|1,-1\rangle_1|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle_2 \\
&+ \sqrt{\frac{1}{3}}\sqrt{2}|10\rangle_1|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle_2 + \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{1}|10\rangle_1|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle_2 \\
2|\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\rangle &= 2\sqrt{\frac{1}{3}}|\pi^- p\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|\pi^0 n\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|\pi^0 n\rangle \\
|\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\rangle &= \sqrt{\frac{1}{3}}|\pi^- p\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|\pi^0 n\rangle
\end{aligned}$$

und zur Vervollständigung des Quartetts:

$$I_-|\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}I_{1-}|1,-1\rangle_1|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle_2 + \sqrt{\frac{2}{3}}I_{1-}|10\rangle_1|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle_2$$

$$
\begin{aligned}
& + \sqrt{\frac{1}{3}} I_{2-}|1,-1\rangle_1|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle_2 + \sqrt{\frac{2}{3}} I_{2-}|10\rangle_1|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle_2 \\
\sqrt{3}|\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\rangle &= 0 + \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{2}|1,-1\rangle_1|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle_2 \\
& + \sqrt{\frac{1}{3}}\sqrt{1}|1,-1\rangle_1|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle_2 + 0 \\
\sqrt{3}|\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\rangle &= 3\sqrt{\frac{1}{3}}|1,-1\rangle_1|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle_2 \\
|\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\rangle &= |\pi^- n\rangle
\end{aligned}
$$

Kommen wir nun zum Dublett, wir wissen, dass die Zustände orthogonal sind, zusätzlich wissen wir, dass für den gesuchten Zustand $|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle$, $I_3 = \frac{1}{2}$ sein soll, daher kommt in diesem Zustand $|\pi^+ n\rangle$ und $|\pi^0 p\rangle$ vor. Wir müssen den Zustand jetzt nur noch so wählen, dass er orthogonal zu $|\frac{3}{2},\frac{1}{2}\rangle$ ist, eine Möglichkeit ist:

$$
|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}|\pi^+ n\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}}|\pi^0 p\rangle
$$

daraus folgt:

$$
\begin{aligned}
\langle\frac{1}{2},\frac{1}{2}|\frac{3}{2},\frac{1}{2}\rangle &= \sqrt{\frac{1}{3}}\sqrt{\frac{2}{3}}\langle\pi^+ n|\pi^+ n\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}}\sqrt{\frac{2}{3}}\langle\pi^0 p|\pi^0 p\rangle \\
&= \sqrt{\frac{2}{9}} - \sqrt{\frac{2}{9}} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Wir finden also für den ersten Dublettzustand:

$$
|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}|\pi^+ n\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}}|\pi^0 p\rangle
$$

Anwendung der Leiteroperatoren bringt uns zum letzten der sechs Terme:

$$
\begin{aligned}
I_-|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}} I_{1-}|11\rangle_1|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle_2 - \sqrt{\frac{1}{3}} I_{1-}|10\rangle_1|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle_2 \\
& + \sqrt{\frac{2}{3}} I_{2-}|11\rangle_1|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle_2 - \sqrt{\frac{1}{3}} I_{2-}|10\rangle_1|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle_2 \\
\sqrt{1}|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{2}|10\rangle_1|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle_2 - \sqrt{\frac{1}{3}}\sqrt{2}|1,-1\rangle_1|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle_2 \\
& + 0 - \sqrt{\frac{1}{3}}\sqrt{1}|10\rangle_1|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle_2 \\
|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle &= \sqrt{\frac{1}{3}}|10\rangle_1|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle_2 - \sqrt{\frac{2}{3}}|1,-1\rangle_1|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle_2 \\
|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle &= \sqrt{\frac{1}{3}}|\pi^0 n\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}|\pi^- p\rangle
\end{aligned}
$$

$\square$

Im folgenden die Inversion der Zustände, zuerst $|\pi^- p\rangle$:

$$\begin{aligned}\sqrt{2}|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}}|\pi^0 n\rangle - \sqrt{\frac{4}{3}}|\pi^- p\rangle \\ |\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\rangle &= \sqrt{\frac{1}{3}}|\pi^- p\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|\pi^0 n\rangle\end{aligned}$$

abziehen der Gleichungen voneinander führt auf:

$$|\pi^- p\rangle = \frac{-1}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{2}|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle - |\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\rangle\right)$$

als nächstes $|\pi^0 p\rangle$:

$$\begin{aligned}\sqrt{2}|\frac{3}{2},\frac{1}{2}\rangle &= \sqrt{\frac{4}{3}}|\pi^0 p\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|\pi^+ n\rangle \\ |\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}}|\pi^+ n\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}}|\pi^0 p\rangle\end{aligned}$$

abziehen voneinander führt auf:

$$|\pi^0 p\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{2}|\frac{3}{2},\frac{1}{2}\rangle - |\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle\right)$$

kommen wir zu $|\pi^+ n\rangle$:

$$\begin{aligned}|\frac{3}{2},\frac{1}{2}\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}}|\pi^0 p\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}|\pi^+ n\rangle \\ \sqrt{2}|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle &= \sqrt{\frac{4}{3}}|\pi^+ n\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}|\pi^0 p\rangle\end{aligned}$$

addieren liefert:

$$|\pi^+ n\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{2}|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle + |\frac{3}{2},\frac{1}{2}\rangle\right)$$

nun noch $|\pi^0 n\rangle$:

$$\begin{aligned}|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle &= \sqrt{\frac{1}{3}}|\pi^0 n\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}|\pi^- p\rangle \\ \sqrt{2}|\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}}|\pi^- p\rangle + \sqrt{\frac{4}{3}}|\pi^0 n\rangle\end{aligned}$$

addieren liefert:

$$|\pi^0 n\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{2}|\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\rangle + |\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle\right)$$

Hieraus ergeben sich für die Pion-Nukleon-Ladungszustände:

$$
\begin{aligned}
|\pi^+ p\rangle &= |\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\rangle \\
|\pi^- p\rangle &= \frac{-1}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{2}|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle - |\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\rangle\right) \\
|\pi^0 p\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{2}|\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle - |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle\right) \\
|\pi^+ n\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{2}|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle + |\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle\right) \\
|\pi^0 n\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{2}|\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\rangle + |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle\right) \\
|\pi^- n\rangle &= |\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\rangle
\end{aligned}
$$

mit dem gezeigten folgt:

$$
\left\langle \pi^+ p | H_s | \pi^+ p \right\rangle = \left\langle \frac{3}{2}, \frac{3}{2} | H_s | \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle = \left\langle \frac{3}{2}, I_3^{TOT} | H_s | \frac{3}{2}, I_3^{TOT} \right\rangle = M_{3/2}
$$

weiter folgt:

$$
\begin{aligned}
\left\langle \pi^- p | H_s | \pi^- p \right\rangle &= \frac{1}{3}\left(\sqrt{2}\langle\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}| - \langle\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}|\right) H_s \left(\sqrt{2}|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle - |\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\rangle\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(2\langle\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}|H_s|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle + \langle\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}|H_s|\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\rangle\right) \\
&= \frac{2}{3}\langle\frac{1}{2}, I_3^{TOT}|H_s|\frac{1}{2}, I_3^{TOT}\rangle + \frac{1}{3}\langle\frac{3}{2}, I_3^{TOT}|H_s|\frac{3}{2}, I_3^{TOT}\rangle \\
&= \frac{2}{3}M_{1/2} + \frac{1}{3}M_{3/2}
\end{aligned}
$$

zu guter letzt:

$$
\begin{aligned}
\left\langle \pi^- p | H_s | \pi^0 n \right\rangle &= \frac{1}{3}\left(-\sqrt{2}\langle\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}| + \langle\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}|\right) H_s \left(\sqrt{2}|\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\rangle + |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle\right) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{3}\langle\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}|H_s|\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\rangle - \frac{\sqrt{2}}{3}\langle\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}|H_s|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle \\
&= \frac{\sqrt{2}}{3}\langle\frac{3}{2}, I_3^{TOT}|H_s|\frac{3}{2}, I_3^{TOT}\rangle - \frac{\sqrt{2}}{3}\langle\frac{1}{2}, I_3^{TOT}|H_s|\frac{1}{2}, I_3^{TOT}\rangle \\
&= \frac{\sqrt{2}}{3}M_{3/2} - \frac{\sqrt{2}}{3}M_{1/2}
\end{aligned}
$$

□

Wir können für die Verhältnisse der Querschnitte bei gleicher Pion-Energie rechnen:

$$
\left|\left\langle \pi^+ p | H_s | \pi^+ p \right\rangle\right|^2 = \left|M_{3/2}\right|^2
$$

$$
\begin{aligned}
\left|\left\langle \pi^- p|H_s|\pi^- p\right\rangle\right|^2 &= \frac{1}{9}\left|2M_{1/2}+M_{3/2}\right|^2 \\
\left|\left\langle \pi^- p|H_s|\pi^0 n\right\rangle\right|^2 &= \frac{2}{9}\left|M_{3/2}-M_{1/2}\right|^2
\end{aligned}
$$

Dies liefert für die Querschnitte im Verhältnis:

$$
\sigma_{\pi^+ p/\pi^+ p} : \sigma_{\pi^- p/\pi^- p} : \sigma_{\pi^- p/\pi^0 n} = 9\left|M_{3/2}\right|^2 : \left|2M_{1/2}+M_{3/2}\right|^2 : 2\left|M_{3/2}-M_{1/2}\right|^2
$$

□

Für $\left|M_{3/2}\right| \gg \left|M_{1/2}\right|$ folgt:

$$
\frac{\sigma_{TOT}\left(\pi^+ + p\right)}{\sigma_{TOT}\left(\pi^- + p\right)} = \frac{9\left|M_{3/2}\right|^2}{\left|M_{3/2}\right|^2 + 2\left|M_{3/2}\right|^2} = \frac{9\left|M_{3/2}\right|^2}{3\left|M_{3/2}\right|^2} = 3
$$

□

Die experimentellen Daten können dies bestätigen, wir erhalten ein Verhältnis von 195 : 65, was genau 3 : 1 entspricht.

5.3 (Zyklotron)

Rotationssymmetrisches Feld mit der Form:

$$
\vec{B} = B_0 \left(\frac{R}{r}\right)^n \vec{e}_z
$$

in der $z = 0$-Ebene. $n = const.$

a)

Wir berechnen die Radialkomponente des Magnetfeldes außerhalb der $z = 0$-Ebene. Wir gehen aus von

$$
\mathrm{rot}\vec{B} = \vec{0}
$$

in Zylinderkoordinaten:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{rot}\vec{B} &= \vec{e}_\varphi \left(\frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r}\right) \\
0 &= \vec{e}_\varphi \frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial r}\left[B_0\left(\frac{R}{r}\right)^n\right] \\
\frac{\partial B_r}{\partial z} &= -B_0 \frac{n}{r}\left(\frac{R}{r}\right)^n \\
B_r &= -B_0 \frac{n}{r}\left(\frac{R}{r}\right)^n z + C
\end{aligned}
$$

Somit ergibt sich für das gesamte $\vec{B}$-Feld:

$$
\vec{B} = \begin{pmatrix} B_r \\ B_\varphi \\ B_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -B_0 n \frac{R^n}{r^{n+1}} z + C \\ 0 \\ B_0\left(\frac{R}{r}\right)^n \end{pmatrix}
$$

b)

Mit der Newton-Gleichung in Zylinderkoordinaten:

$$F = m\vec{a} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = m\left[\left(\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right)\vec{e}_r + \left(r\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt}\right)\vec{e}_\varphi + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{e}_z\right]$$

wobei für die radiale bzw. vertikale Richtung gilt:

$$\begin{aligned} F_r &= \left(\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right)\vec{e}_r \\ F_z &= \frac{d^2z}{dt^2}\vec{e}_z \end{aligned}$$

und der Lorentzkraft:

$$F_L = q\vec{v} \times \vec{B}$$

mit $\vec{v} = \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\frac{d\varphi}{dt}\vec{e}_\varphi + \frac{dz}{dt}\vec{e}_z$ gilt:

$$F_L = \begin{vmatrix} \vec{e}_r & \frac{dr}{dt} & -B_0 n\frac{R^n}{r^{n+1}}z + C \\ \vec{e}_\varphi & r\frac{d\varphi}{dt} & 0 \\ \vec{e}_z & \frac{dz}{dt} & B_0\left(\frac{R}{r}\right)^n \end{vmatrix} = qr\frac{d\varphi}{dt}B_0\left(\frac{R}{r}\right)^n\vec{e}_r + qr\frac{d\varphi}{dt}\left(-B_0 n\frac{R^n}{r^{n+1}}z + C\right)\vec{e}_z + \ldots$$

Somit folgt also, wobei wir $\frac{d\varphi}{dt} = \omega = const.$ und $C = 0$ wählen:

$$\begin{aligned} F_{L,r} &= q\omega r B_0\left(\frac{R}{r}\right)^n\vec{e}_r \\ F_{L,z} &= -q\omega r B_0 n\frac{R^n}{r^{n+1}}z\vec{e}_z \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich für die radiale Komponente:

$$\begin{aligned} q\omega r B_0\left(\frac{R}{r}\right)^n &= \frac{d^2r}{dt^2} - \omega^2 r \\ \frac{d^2r}{dt^2} - qB_0R^n r^{1-n} + \omega^2 r &= 0 \end{aligned}$$

für den Fall $n = 1$ erhalten wir eine inhomogene DGL.

$$\frac{d^2r}{dt^2} + \omega^2 r = qB_0R$$

Für den Fall $n = 0$ erhalten wir

$$\frac{d^2r}{dt^2} - \left(qB_0 - \omega^2\right)r = 0$$

einen oszillierenden Term, den wir haben möchten:

$$
\begin{aligned}
r &= \cos\sqrt{qB_0 - \omega^2}t \\
\frac{dr}{dt} &= -\sqrt{qB_0 - \omega^2}\sin\sqrt{qB_0 - \omega^2}t \\
\frac{d^2r}{dt^2} &= -\left(qB_0 - \omega^2\right)\cos\sqrt{qB_0 - \omega^2}t
\end{aligned}
$$

Wählen wir $0 > n > 1$ erhalten wir eine nicht so leicht lösbare nicht lineare DGL, daher erscheint die Wahl $n \in [0, 1]$ sinnvoll.

Betrachten wir nun die vertikale Komponente:

$$
\frac{d^2z}{dt^2} + q\omega B_0 n\left(\frac{R}{r}\right)^n z = 0
$$

dies ist lösbar mit:

$$
\begin{aligned}
z &= \cos\sqrt{q\omega B_0 n\left(\frac{R}{r}\right)^n}t \\
\frac{dz}{dt} &= -\sqrt{q\omega B_0 n\left(\frac{R}{r}\right)^n}\sin\sqrt{q\omega B_0 n\left(\frac{R}{r}\right)^n}t \\
\frac{d^2z}{dt^2} &= -q\omega B_0 n\left(\frac{R}{r}\right)^n\cos\sqrt{q\omega B_0 n\left(\frac{R}{r}\right)^n}t
\end{aligned}
$$

c)

Wie in **b)** betrachtet, sind die Oszillationen für $n \in [0, 1]$ stabil in der radialen Richtung, während die Oszillationen in vertikaler Richtung für $n > 0$ stabil sind. Das folgt daher, da für $n \leq 0$ keine oszillatorischer Term mehr vorhanden wäre, da für $n = 0$ der Wert konstant $z = 1$ wäre und für den Fall $n < 0$ würde das Argument des Kosinus imaginär, d.h. wir würden einen exponentialen Term erhalten mit:

$$
\cos ix = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x
$$

daher gilt für den vertikalen Fall $n \in [0, N]$, wobei $N \to \infty$. Ziehen wir beide Bedingungen zusammen, da die Feldrichtungen miteinander verknüpft sind, ergibt sich die Bedingung $n \in [0, 1]$.

5.4 (Zerfallsprodukte von hochenergetische Teilchen)

Es ist zu zeigen, dass für hohe Strahlenergien $E_L \gg m_b c^2$ für den Zerfallswinkel gilt:

$$
\tan\theta_L \approx \frac{m_b c^2}{\sqrt{2}E_L}\frac{u\sin\theta_c}{u\cos\theta_c + c}
$$

Als erstes verlegen wir unser System in die x, y-Ebene, somit ist die p_z-Komponente immer null.

Wir gehen ins Ruhesystem des zerfallenden Teilchens b, hierfür erhalten wir für den Vierervektor von P:

$$q_c = \begin{pmatrix} \frac{E'}{c} \\ p'_x \\ p'_y \\ p'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{E_c}{c} \\ mu \cdot \cos\theta_c \\ mu \cdot \sin\theta_c \\ 0 \end{pmatrix}$$

Im Laborsystem, welches über die Lorentztransformation mit dem Ruhesystem verbunden ist, gilt:

$$q_L = \begin{pmatrix} \frac{E}{c} \\ m_P u' \cos\theta_L \\ m_P u' \sin\theta_L \\ 0 \end{pmatrix}$$

Anwendung der Lorentztransformation liefert:

$$q_L = \Lambda q_c$$

explizit (hier benutzen wir die x-Richtung):

$$\begin{pmatrix} \frac{E}{c} \\ m_P u' \cos\theta_L \\ m_P u' \sin\theta_L \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{E_c}{c} \\ m_P u \cdot \cos\theta_c \\ m_P u \cdot \sin\theta_c \\ 0 \end{pmatrix}$$

somit gilt also:

$$q_L = \begin{pmatrix} \gamma \frac{E_c}{c} - \beta\gamma m_P u \cdot \cos\theta_c \\ -\beta\gamma \frac{E_c}{c} + \gamma m_P u \cdot \cos\theta_c \\ m_P u \cdot \sin\theta_c \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit $\gamma = \frac{E}{m_P c^2}$ und $\beta = 1$, mit $v \approx c$ folgt:

$$q_L = \begin{pmatrix} \frac{E}{m_P c^2} \frac{E_c}{c} - \frac{E}{m_P c^2} m_P u \cdot \cos\theta_c \\ -\frac{E}{m_P c^2} \frac{E_c}{c} + \frac{E}{m_P c^2} m_P u \cdot \cos\theta_c \\ m_P u \cdot \sin\theta_c \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{E}{m_P c^2} \frac{E_c}{c} - \frac{E}{c^2} u \cdot \cos\theta_c \\ -\left(\frac{E}{m_P c^2} \frac{E_c}{c} - \frac{E}{c^2} u \cdot \cos\theta_c \right) \\ m_P u \cdot \sin\theta_c \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{E}{c} \\ m_P u' \cos\theta_L \\ m_P u' \sin\theta_L \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wir können die Terme identifizieren:

$$\begin{aligned} \frac{E}{c} &= \frac{E}{m_P c^2} \frac{E_c}{c} - \frac{E}{c^2} u \cdot \cos\theta_c \\ -\left(\frac{E}{m_P c^2} \frac{E_c}{c} - \frac{E}{c^2} u \cdot \cos\theta_c \right) &= m_P u' \cos\theta_L \\ m_P u \cdot \sin\theta_c &= m_P u' \sin\theta_L \end{aligned}$$

vereinfacht ergibt sich damit:

$$
\begin{aligned}
u \cdot \cos\theta_c + c &= \frac{E_c}{m_P c} \\
u \cdot \cos\theta_c - \frac{E_c}{m_P c} &= \frac{m_P c^2}{E} u' \cos\theta_L \\
u' &= \frac{u \sin\theta_c}{\sin\theta_L}
\end{aligned}
$$

weiter durch einsetzen von u':

$$
\begin{aligned}
\frac{\sin\theta_L}{\cos\theta_L} &= \frac{m_P c^2}{E} \frac{u \sin\theta_c}{u \cdot \cos\theta_c - \frac{E_c}{m_P c}} \\
\tan\theta_L &= \frac{m_P c^2}{E} u \sin\theta_c
\end{aligned}
$$

Dies ist nicht äquivalent zum gesuchten Ergebnis ...
Unter Verwendung der Näherung $E_L \gg m_b c^2$ folgt:

$$
\begin{aligned}
E_L^2 &= \vec{p_L}^2 c^2 + \left(m_b c^2\right)^2 \\
\vec{p_L}^2 &= \frac{E_L^2 - \left(m_b c^2\right)^2}{c^2} \\
|\vec{p_L}| &\approx \frac{E_L}{c}
\end{aligned}
$$

...