Heiko Dumlich 14. November 2007

4 Übungsblatt Kern und Teilchenphysik

4.1 (intrinsische Parität des π^- aus der Deuteronspaltung bei π^- Einfang)

Wir betrachten die Teilchenreaktion:

$$\pi^- + d \to n + n$$

hierbei wird ein π^- eingefangen, welches ein Deuteron spaltet. Die Parität soll erhalten bleiben, d.h. $P_{in} = P_{fi}$. Das Deuteron besitze einen Spin von $S = 1$ und sei ein gebundener s-Zustand von p und n, d.h. $l = 0$. Zudem sei (durch experimentelle Ergebnisse) bekannt, dass das Pion in Ruhe in einen s-Zustand eigefangen wird. D.h. auch für das Pion gilt $l = 0$. Für die initial Parität gilt:

$$P_{in} = P_d \cdot P_{\pi^-} \cdot (-1)^{l_{\pi d}} = P_{\pi^-}$$

da $P_d = +1$ (Die Parität der Nukleonen ist gleich, d.h. Proton und Neutron haben die gleiche Parität, für ein zusammengesetztes System gilt $P_{12} = P_1 \cdot P_2 \cdot (-1)^{l_{12}}$, in diesem Fall ist $l_{12} = 0$ und $P_1 = P_2 \Rightarrow P_1 \cdot P_2 = +1$, da die Multiplikation zweier Elemente mit gleichem Vorzeichen immer etwas positives liefert) und $l_{\pi d} = 0$.

Die final Parität ergibt sich mit:

$$P_{fi} = \underbrace{P_n \cdot P_n}_{+1} \cdot (-1)^{l_{2n}} = (-1)^{l_{2n}}$$

Aus der Bedingung $P_{in} = P_{fi}$, d.h. der Paritätserhaltung folgt also für die intrinsische Parität des π^-:

$$P_\pi = (-1)^{l_{2n}}$$

es ist nun l_{2n} zu bestimmen. Dies ist möglich über die Drehimpulserhaltung $J_{in} = J_{fi}$, wobei:

$$\begin{aligned} J_{in} &= L + I_d = l_{\pi d} + 1 = 1 \\ J_{fi} &= L + I_{2n} = l_{2n} + I_{2n} \end{aligned}$$

mit dem Kernspin I (wir besitzen keine Elektronenspins (Spin des Pions $s_{\pi^-} = 0$), daher keine S).

Es gilt also:

$$l_{2n} + I_{2n} = 1$$

Das bedeutet also, dass es vier verschiedene Kombinationsmöglichkeiten für $l_{2n} = 0, 1, 2$ und $I_{2n} = 0, 1$ gibt, um den Gesamtdrehimpuls 1 zu erzeugen. Wir wissen, dass die Gesamtwellenfunktion antisymmetrisch (-1) sein muss, daher folgt:

l_{2n}	I_{2n}	Vorzeichen bei Teilchenvertauschung in den J-Zuständen
1	0	$(-1) \cdot (-1) = +1$
0	1	$(+1) \cdot (+1) = +1$
1	1	$(-1) \cdot (+1) = -1$
2	1	$(+1) \cdot (+1) = +1$

Hieraus folgt, dass die einzige Möglichkeit $l_{2n} = 1$ und $I_{2n} = 1$ ist, somit gilt also:

$$P_{fi} = (-1)^{l_{2n}} = -1$$

und wir erhalten die intrinsische Parität für das Pion mit:

$$P_{\pi^-} = -1$$

4.2 (C_{3v} - Symmetrieoperationen eines gleichseitigen Dreiecks)

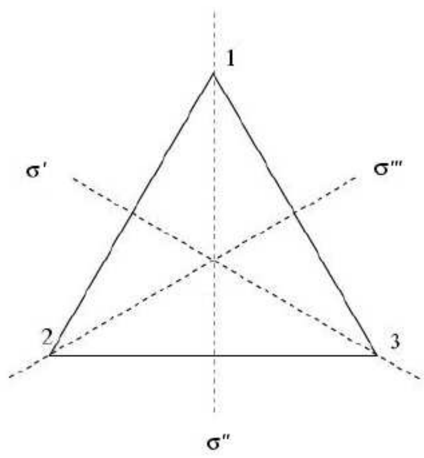

Abbildung 1: Spiegelebenen $(\sigma', \sigma'', \sigma''')$ des gleichseitigen Dreiecks, Drehungen um 120° (im Uhrzeigersinn) überführen $1 \to 3, 3 \to 2, 2 \to 1$ und Drehungen um 240° überführen $1 \to 2, 3 \to 1, 2 \to 3$, die Identität liefert das gleiche Dreieck.

Es ist zu zeigen, dass die 6 Symmetrie-Operationen eine Gruppe bilden und zusätzlich ist die Multiplikationstafel der Gruppe zu konstruieren. Die 6 möglichen Symmetrieoperationen sind $E, {C_3}^1, {C_3}^2, {\sigma_v}', {\sigma_v}'', {\sigma_v}'''$, d.h. die Identität, eine Drehung um 120°, eine Drehung um 240° (die Drehung um 360° wäre wieder die Identität) und drei Spiegelebenen, welche jeweils von einer der Seitenhalbierenden zu einer Ecke des Dreiecks laufen.

Zuerst betrachten wir die Gruppeneigenschaften:

1) Abgeschlossenheit

Die Abgeschlossenheit wird durch die unten folgende Multiplikationstabelle gewährleistet.

2) Einselement
Wir suchen das Einselement für diese Gruppe. Die Identität kann sofort als Einselement identifiziert werden. Dies kann man auch nutzen, um schnell einige Elemente in die Multiplikationstabelle einzutragen. Es gilt:

$$A \circ E = E \circ A = A$$

3) Inverses Element
Wir prüfen, ob jedes Element der Gruppe ein inverses besitzt. Dies ist der Fall, wenn

$$A \circ A^{-1} = A^{-1} \circ A = E$$

dies lässt sich leicht mit Hilfe der unten folgenden Multiplikationstabelle zeigen, es gilt:

$$\begin{aligned} E \circ E &= E \\ {C_3}^1 \circ {C_3}^2 &= E \\ {C_3}^2 \circ {C_3}^1 &= E \\ {\sigma_v}' \circ {\sigma_v}' &= E \\ {\sigma_v}'' \circ {\sigma_v}'' &= E \\ {\sigma_v}''' \circ {\sigma_v}''' &= E \end{aligned}$$

Die Spiegelungen sind also zu sich selbst invers, die Identität trivialer Weise auch und die Inversen der Drehungen sind jeweils die anderen Drehungen.
4) Assoziativgesetz
Das Assoziativgesetz gilt allgemein für die Matrizenmultiplikation, also auch speziell für die Multiplikation der Matrizen der C_{3v}-Gruppe, welche durch Matrizen dargestellt werden können, d.h. es gilt:

$$[A \circ B] \circ C = A \circ [B \circ C]$$

5) Multiplikationstabelle
Die Multiplikationstabelle ergibt sich aus der Betrachtung des gleichseitigen Dreiecks und Anwendung der Symmetrieoperationen, wobei die Elemente der Tabelle jeweils hintereinander ausgeführt werden, wobei zuerst das Element auf der y-Achse und dann das Element auf der x-Achse ausgeführt wird.

C_{3v}	E	${C_3}^1$	${C_3}^2$	${\sigma_v}'$	${\sigma_v}''$	${\sigma_v}'''$
E	E	${C_3}^1$	${C_3}^2$	${\sigma_v}'$	${\sigma_v}''$	${\sigma_v}'''$
${C_3}^1$	${C_3}^1$	${C_3}^2$	E	${\sigma_v}'''$	${\sigma_v}'$	${\sigma_v}''$
${C_3}^2$	${C_3}^2$	E	${C_3}^1$	${\sigma_v}''$	${\sigma_v}'''$	${\sigma_v}'$
${\sigma_v}'$	${\sigma_v}'$	${\sigma_v}''$	${\sigma_v}'''$	E	${C_3}^1$	${C_3}^2$
${\sigma_v}''$	${\sigma_v}''$	${\sigma_v}'''$	${\sigma_v}'$	${C_3}^2$	E	${C_3}^1$
${\sigma_v}'''$	${\sigma_v}'''$	${\sigma_v}'$	${\sigma_v}''$	${C_3}^1$	${C_3}^2$	E

6) Kommutativgesetz
Wenn eine Gruppe unter einer Operation kommutativ ist, dann gilt:

$$A \circ B = B \circ A$$

für alle Elemente der Gruppe.

Um zu zeigen, dass die Gruppe nicht abelsch ist, reicht es für eines der Elemente zu zeigen, dass dieses nicht kommutativ ist, da in abelschen Gruppen die Elemente kommutieren, wir wählen:

$$\begin{aligned} \sigma_v{}' \cdot C_3{}^1 &= \sigma_v{}'' \\ C_3{}^1 \cdot \sigma_v{}' &= \sigma_v{}''' \end{aligned}$$

es gilt also:

$$\sigma_v{}' \cdot C_3{}^1 \neq C_3{}^1 \cdot \sigma_v{}'$$

somit ist die Gruppe nicht abelsch.

7) eindimensionale Darstellung

Eine mögliche nicht-triviale eindimensionale Darstellung ist:

$$\begin{aligned} A = f\left(E, C_3{}^1, C_3{}^3\right) &= 1 \\ B = f\left(\sigma_v{}', \sigma_v{}'', \sigma_v{}'''\right) &= -1 \end{aligned}$$

wobei 1 hier das Einselement, und 1 invers zu 1 und -1 invers zu -1 ist. Es ergibt sich als Multiplikationstabelle in diesem Fall:

	A	A	A	B	B	B
A	1	1	1	-1	-1	-1
A	1	1	1	-1	-1	-1
A	1	1	1	-1	-1	-1
B	-1	-1	-1	1	1	1
B	-1	-1	-1	1	1	1
B	-1	-1	-1	1	1	1

8) Darstellung getreu ?

Eine Darstellung ist getreu, wenn es einen isomorphen Zusammenhang zwischen Symmetrieoperation und eindimensionaler Darstellung gibt. Wenn also die Darstellung f injektiv und surjektiv, also bijektiv ist und zudem f ein Homomorphismus ist. Wir zeigen durch ein Gegenbeispiel, dass dies nicht der Fall ist. Es gilt:

$$\begin{aligned} f(E) &= 1 \\ f\left(C_3{}^1\right) &= 1 \end{aligned}$$

hieraus müsste im Fall der getreuen Darstellung folgen:

$$E = C_3{}^1$$

dies ist jedoch nicht der Fall ! Die Darstellung ist also nicht getreu.