Heiko Dumlich 8. November 2007

3 Übungsblatt Kern und Teilchenphysik

3.1 (Quadrupolmagnet - Bahngleichung)

Es ist zu zeigen, dass für die Bahngleichung eines relativistischen Protons, das sich mit $|\vec{p}|$ und kleiner Neigung zur Strahlachse z in einem Quadrupolmagneten bewegt gilt:

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dz^2} + kx &= 0 \\ \frac{d^2y}{dz^2} - ky &= 0\end{aligned}$$

mit $k = \frac{eg}{|\vec{p}|}$. Die Gleichungen sind unter folgender zusätzlicher Vorraussetzung gültig: $v_x/v_z \ll 1$ und $v_y/v_z \ll 1$. Auf Grund der hohen Geschwindigkeit entlang der Strahlachse gilt $v_z \approx c$. Wir leiten die erste Gleichung her, es gilt:

$$F_x = e\left(v_y B_z - v_z B_y\right) \approx -ecgx$$

mit $F_x = \gamma m \frac{d^2x}{dt^2} = \gamma m \frac{d^2x}{dz^2}\frac{d^2z}{dt^2} = \gamma m v_z^2 \frac{d^2x}{dz^2}$ folgt:

$$\begin{aligned}\gamma m v_z^2 \frac{d^2x}{dz^2} &= -ecgx \\ \frac{d^2x}{dz^2} + \frac{eg}{\gamma m v_z}x &= 0 \\ \frac{d^2x}{dz^2} + kx &= 0\end{aligned}$$

$\square$

Die zweite Gleichung folgt mit Hilfe von:

$$F_y = e\left(v_z B_x - v_x B_z\right) \approx ecgy$$

und $F_y = \gamma m \frac{d^2y}{dt^2} = \gamma m \frac{d^2y}{dz^2}\frac{d^2z}{dt^2} = \gamma m v_z^2 \frac{d^2y}{dz^2}$:

$$\begin{aligned}\gamma m v_z^2 \frac{d^2y}{dz^2} &= ecgy \\ \frac{d^2y}{dz^2} - \frac{eg}{\gamma m v_z}y &= 0 \\ \frac{d^2y}{dz^2} + ky &= 0\end{aligned}$$

$\square$

3.2 (Quadrupolmagnet - Matrizen)

Es ist zu zeigen, dass

$$\begin{pmatrix} x \\ x^{/} \end{pmatrix} = M_F \begin{pmatrix} x_0 \\ x_0^{/} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} y \\ y^{/} \end{pmatrix} = M_D \begin{pmatrix} y_0 \\ y_0^{/} \end{pmatrix}$$

mit

$$M_F = \begin{pmatrix} \cos\sqrt{k}L & \frac{1}{\sqrt{k}}\sin\sqrt{k}L \\ -\sqrt{k}\sin\sqrt{k}L & \cos\sqrt{k}L \end{pmatrix}, \qquad M_D = \begin{pmatrix} \cosh\sqrt{k}L & \frac{1}{\sqrt{k}}\sinh\sqrt{k}L \\ \sqrt{k}\sinh\sqrt{k}L & \cosh\sqrt{k}L \end{pmatrix}$$

Wir gehen aus von den in **Aufgabe 9** hergeleiteten Bahngleichungen.

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dz^2} + kx &= 0 \\ \frac{d^2y}{dz^2} - ky &= 0 \end{aligned}$$

Unter Zuhilfenahme des allgemeinen Ansatzes:

$$\begin{aligned} x &= Ae^{-\alpha z} + Be^{\alpha z} \\ \frac{dx}{dz} &= -\alpha Ae^{-\alpha z} + \alpha Be^{\alpha z} \\ \frac{d^2x}{dz^2} &= \alpha^2\left(Ae^{-\alpha z} + Be^{\alpha z}\right) \end{aligned}$$

folgt:

$$\alpha = \pm\sqrt{-k} = \pm i\sqrt{k}$$

Unter den Randbedingungen $x(0) = x_0$ und $\frac{dx}{dz}(0) = x_0^{/}$ folgt:

$$\begin{aligned} x_0 &= A + B \\ x_0^{/} &= -\alpha A + \alpha B \end{aligned}$$

Hieraus erhalten wir A und B als:

$$\begin{aligned} A &= \frac{\alpha x_0 - x_0^{/}}{2\alpha} \\ B &= \frac{\alpha x_0 + x_0^{/}}{2\alpha} \end{aligned}$$

Dies eingesetzt in x liefert:

$$x = \left(\frac{\alpha x_0 - x_0^{/}}{2\alpha}\right) e^{-\alpha z} + \left(\frac{\alpha x_0 + x_0^{/}}{2\alpha}\right) e^{\alpha z}$$

Dies lässt sich umschreiben zu:

$$x = \frac{1}{2}\left(e^{-\alpha z} + e^{\alpha z}\right) \cdot x_0 + \frac{1}{2\alpha}\left(e^{\alpha z} - e^{-\alpha z}\right) \cdot x_0^{/}$$

Betrachten wir nun $\alpha = i\sqrt{k}$, so erhalten wir

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}\left(e^{-i\sqrt{k}z} + e^{i\sqrt{k}z}\right) \cdot x_0 + \frac{1}{2i\sqrt{k}}\left(e^{i\sqrt{k}z} - e^{-i\sqrt{k}z}\right) \cdot x_0^{/} \\ &= \frac{\left(e^{-i\sqrt{k}z} + e^{i\sqrt{k}z}\right)}{2} \cdot x_0 + \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{\left(e^{i\sqrt{k}z} - e^{-i\sqrt{k}z}\right)}{2i} \cdot x_0^{/} \\ &= \cos\left(\sqrt{k}z\right) \cdot x_0 + \frac{1}{\sqrt{k}} \sin\left(\sqrt{k}z\right) \cdot x_0^{/} \end{aligned}$$

Die Ableitung liefert:

$$\frac{dx}{dz} = x^{/} = -\sqrt{k}\sin\left(\sqrt{k}z\right) \cdot x_0 + \cos\left(\sqrt{k}z\right) \cdot x_0^{/}$$

Somit erhalten wir, wenn wir dies in Matrixform, wobei wir $z = L$ setzen, schreiben:

$$\begin{pmatrix} x \\ x^{/} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\left(\sqrt{k}L\right) & \frac{1}{\sqrt{k}}\sin\left(\sqrt{k}L\right) \\ -\sqrt{k}\sin\left(\sqrt{k}L\right) & \cos\left(\sqrt{k}L\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_0^{/} \end{pmatrix}$$

D.h. für die Matrix M_{F} folgt:

$$M_F = \begin{pmatrix} \cos\left(\sqrt{k}L\right) & \frac{1}{\sqrt{k}}\sin\left(\sqrt{k}L\right) \\ -\sqrt{k}\sin\left(\sqrt{k}L\right) & \cos\left(\sqrt{k}L\right) \end{pmatrix}$$

□

Um die zweite Matrix zu zeigen, betrachten wir die y-Richtung, wobei wir auf Grund der Allgemeinheit des Ansatzes für die x-Komponente den gleichen Ansatz verwenden können. Wir müssen nur diesen Ansatz in die DGL für die y-Komponente einsetzen und erhalten:

$$\begin{aligned} \alpha^2\left(Ae^{-\alpha z} + Be^{\alpha z}\right) - k\left(Ae^{-\alpha z} + Be^{\alpha z}\right) &= 0 \\ \alpha &= \pm\sqrt{k} \end{aligned}$$

Dies setzen wir nun in:

$$y = \frac{1}{2}\left(e^{-\alpha z} + e^{\alpha z}\right) \cdot y_0 + \frac{1}{2\alpha}\left(e^{\alpha z} - e^{-\alpha z}\right) \cdot y_0^{/}$$

welche bis auf das andere α identisch ist für x und y. Hieraus folgt mit $\alpha = \sqrt{k}$ also:

$$\begin{aligned} y &= \frac{\left(e^{-\sqrt{k}z} + e^{\sqrt{k}z}\right)}{2} \cdot y_0 + \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{\left(e^{\sqrt{k}z} - e^{-\sqrt{k}z}\right)}{2} \cdot y_0^{/} \\ &= \cosh\left(\sqrt{k}z\right) \cdot y_0 + \frac{1}{\sqrt{k}} \sinh\left(\sqrt{k}z\right) \cdot y_0^{/} \end{aligned}$$

Die Ableitung liefert:

$$y^{\prime} \quad = \quad \sqrt{k} \sinh\left(\sqrt{k}z\right) \cdot y_0 + \cosh\left(\sqrt{k}z\right) \cdot y_0^{\prime}$$

wobei sich die Ableitung von $\cosh y = \frac{e^y + e^{-y}}{2}$ zu $\frac{d}{dy} \cosh y = \frac{e^y - e^{-y}}{2} = \sinh y$ ergibt und die Ableitung von $\sinh y = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$ zu $\frac{d}{dy} \sinh y = \frac{e^y + e^{-y}}{2} = \cosh y$. In Matrixform mit $z = L$ erhalten wir:

$$\begin{pmatrix} y \\ y^{\prime} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\left(\sqrt{k}L\right) & \frac{1}{\sqrt{k}} \sinh\left(\sqrt{k}L\right) \\ \sqrt{k} \sinh\left(\sqrt{k}L\right) & \cosh\left(\sqrt{k}L\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_0^{\prime} \end{pmatrix}$$

Das heisst, die Matrix M_{D} ergibt sich zu:

$$M_D = \begin{pmatrix} \cosh \sqrt{k}L & \frac{1}{\sqrt{k}} \sinh \sqrt{k}L \\ \sqrt{k} \sinh \sqrt{k}L & \cosh \sqrt{k}L \end{pmatrix}$$

□

Wir betrachten eine feldfreie Region der Länge l, wobei zu zeigen ist, das hierfür die Matrix

$$M_0 = \begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

folgt. Betrachten wir dafür zuerst M_F, wobei auf Grund der Quadrupolstärke $k = 0$ sich folgende Form ergibt:

$$M_F\Big|_{k=0} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sin \sqrt{k}l}{\sqrt{k}}\Big|_{k=0} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bis auf den Wert für $\frac{\sin \sqrt{k}l}{\sqrt{k}}$ sind die Werte klar. Für diesen müssen wir eine Grenzwertbetrachtung durchführen, es gilt:

$$\lim_{k \to 0} \frac{\sin \sqrt{k}l}{\sqrt{k}} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{\frac{x}{l}} = l \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = l$$

Der Grenzwert liefert also l, somit erhalten wir für die Matrix im feldfreien Raum:

$$M_F\Big|_{k=0} = M_0 = \begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Betrachten wir nun die y-Komponente, für diese gilt:

$$M_D\Big|_{k=0} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sinh \sqrt{k}L}{\sqrt{k}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

da $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, was für $x = 0$ eine 1 liefert und $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, was für $x = 0$ eine 0 liefert. Fraglich ist hier der Eintrag $\frac{\sinh \sqrt{k}L}{\sqrt{k}}$, für den wir eine Grenzwertbetrachtung durchführen:

$$\lim_{k\to 0}\frac{\sinh\sqrt{k}l}{\sqrt{k}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sinh x}{\frac{x}{l}}=l\lim_{x\to 0}\frac{\sinh x}{x}=l$$

wobei $\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$, Anwendung von L'Hospital liefert:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sinh x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{2\cdot 1}=1$$

Somit folgt also für die Matrix im feldfreien Raum:

$$M_F\Big|_{k=0}=M_D\Big|_{k=0}=M_0=\begin{pmatrix}1 & l\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

□

Alternativ lässt sich dies auch in wenigen Zeilen mit Matrizenoptik zeigen. Wir betrachten den feldfreien Raum der Länge l. Am Anfang ist der Abstand zur Strahlachse $x_{IN}=x_1$, am Ende sei dieser $X_{OUT}=x_2$. Für die Steigung gelte in beiden Fällen $x^{/}_{IN}=x^{/}_{OUT}=\tan\alpha=\frac{(x_2-x_1)}{l}$. Es gilt nun:

$$\vec{r}_2=M_0\vec{r}_1$$

ausgeschrieben:

$$\begin{pmatrix}x_2\\ \tan\alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ \tan\alpha\end{pmatrix}$$

Das sich ergebende Gleichungssystem ist leicht lösbar:

$$\begin{aligned}x_2 &= A\cdot x_1+B\cdot\frac{(x_2-x_1)}{l}\Rightarrow A=1,B=l\\ \tan\alpha &= C\cdot x_1+D\cdot\tan\alpha\Rightarrow C=0,D=1\end{aligned}$$

somit ergibt sich:

$$M_0=\begin{pmatrix}1 & l\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

□

Es ist nun die Matrix für dünne Linsen:

$$M_L=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -\frac{1}{f} & 1\end{pmatrix}$$

nachzuweisen. Es gilt für die Transfermatrix einer dünnen Linse:

$$\begin{pmatrix}x\\ x^{/}\end{pmatrix}_{OUT}=\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ x^{/}\end{pmatrix}_{IN}$$

Dies liefert ein Gleichungssystem:

$$
\begin{aligned}
x_{OUT} &= A \cdot x_{IN} + B \cdot x_{IN}^{/} \\
x_{OUT}^{/} &= C \cdot x_{IN} + D \cdot x_{IN}^{/}
\end{aligned}
$$

Für einen aus dem Unendlichen im Abstand x_0 von der Strahlachse kommenden Strahl, der auf die dünne Linse trifft, gilt $x_{IN} = x_0$, $x_{OUT} = x_0$, mit den Steigungen $x_{IN}^{/} = 0$ und $x_{OUT}^{/} = -\frac{x_0}{f}$. Dies liefert:

$$
\begin{aligned}
x_0 &= A \cdot x_0 \Rightarrow A = 1 \\
-\frac{x_0}{f} &= C \cdot x_0 \Rightarrow C = -\frac{1}{f}
\end{aligned}
$$

Betrachten wir jetzt zusätzlich noch einen Brennpunktstrahl, wobei für diesen gilt $x_{IN} = x_0$, $x_{OUT} = x_0$, mit den Steigungen $x_{IN}^{/} = \frac{x_0}{f}$ und $x_{OUT}^{/} = 0$, so erhalten wir das zweite Gleichungssystem, wodurch wir vier Gleichungen mit vier Unbekannten besitzen.

$$
\begin{aligned}
x_0 &= A \cdot x_0 + B \cdot \frac{x_0}{f} \Rightarrow B = 0 \\
0 &= C \cdot x_0 + D \cdot \frac{x_0}{f} \Rightarrow D = 1
\end{aligned}
$$

Wir erhalten also die Matrix:

$$
M_L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix}
$$

$\square$

Es ist zu zeigen, dass aus Multiplikation der drei Matrizen (feldfrei s_1, Linse, feldfrei s_2) die Linsengleichung:

$$
\frac{1}{f} = \frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2}
$$

unter der Bedingung $M_{12}^{\text{sys}} = 0$ folgt.

Wir multiplizieren die Matrizen:

$$
M_0\left(s_1\right).M_L.M_0\left(s_2\right) = \begin{pmatrix} 1 & s_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & s_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

Dies liefert:

$$
\begin{aligned}
M_0\left(s_1\right).M_L.M_0\left(s_2\right) &= \begin{pmatrix} 1 - \frac{s_1}{f} & s_1 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & s_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 - \frac{s_1}{f} & \left(1 - \frac{s_1}{f}\right) s_2 + s_1 \\ -\frac{1}{f} & -\frac{s_2}{f} + 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Mit der Bedingung $M_{12}^{\text{sys}} = 0$ folgt:

$$\begin{aligned}
\left(1-\frac{s_1}{f}\right)s_2+s_1 &= 0\\
\frac{s_1 s_2}{f} &= s_1+s_2\\
\frac{1}{f} &= \frac{s_1+s_2}{s_1 s_2}\\
\frac{1}{f} &= \frac{1}{s_1}+\frac{1}{s_2}
\end{aligned}$$

$\square$

3.3 (Quadrupolmagnet - dicke Linse)

Es ist zu zeigen, dass M_F für einen fokussierenden Quadrupolmagneten zerlegt werden kann in das Produkt:

$$M_F = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{k}}\tan\left(\frac{\sqrt{k}L}{2}\right) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\sqrt{k}\sin\left(\sqrt{k}L\right) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{k}}\tan\left(\frac{\sqrt{k}L}{2}\right) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

wobei wir in **Aufgabe 10** gezeigt haben, dass für M_F gilt:

$$M_F = \begin{pmatrix} \cos\left(\sqrt{k}L\right) & \frac{1}{\sqrt{k}}\sin\left(\sqrt{k}L\right) \\ -\sqrt{k}\sin\left(\sqrt{k}L\right) & \cos\left(\sqrt{k}L\right) \end{pmatrix}$$

Es sind auch die am Produkt beteiligten Matrizen wiederzuerkennen, welche in **Aufgabe 10** als M_0 und M_L gezeigt wurden, wobei wir hier das Modell einer "dicken Linse" beschreiben, indem wir feldfreie Strecken der Länge $l = \frac{1}{\sqrt{k}}\tan\frac{\sqrt{k}L}{2}$ um eine dünne Linse legen, welche eine Fokuslänge von $f = \frac{1}{\sqrt{k}\sin\sqrt{k}L}$ besitzt.

Wir können also zum Nachweis die Matrizen aus der Produktzerlegung multiplizieren:

$$\begin{aligned}
M_F &= \begin{pmatrix} 1-\tan\left(\frac{\sqrt{k}L}{2}\right)\sin\left(\sqrt{k}L\right) & \frac{1}{\sqrt{k}}\tan\left(\frac{\sqrt{k}L}{2}\right) \\ -\sqrt{k}\sin\left(\sqrt{k}L\right) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{k}}\tan\left(\frac{\sqrt{k}L}{2}\right) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} 1-\tan\left(\frac{\sqrt{k}L}{2}\right)\sin\left(\sqrt{k}L\right) & \left(1-\tan\left(\frac{\sqrt{k}L}{2}\right)\sin\left(\sqrt{k}L\right)\right)\frac{1}{\sqrt{k}}\tan\left(\frac{\sqrt{k}L}{2}\right)+\frac{1}{\sqrt{k}}\tan\left(\frac{\sqrt{k}L}{2}\right) \\ -\sqrt{k}\sin\left(\sqrt{k}L\right) & -\sin\left(\sqrt{k}L\right)\tan\left(\frac{\sqrt{k}L}{2}\right)+1 \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} 1-\sin\left(\sqrt{k}L\right)\tan\left(\frac{\sqrt{k}L}{2}\right) & \left(2-\tan\left(\frac{\sqrt{k}L}{2}\right)\sin\left(\sqrt{k}L\right)\right)\frac{1}{\sqrt{k}}\tan\left(\frac{\sqrt{k}L}{2}\right) \\ -\sqrt{k}\sin\left(\sqrt{k}L\right) & 1-\sin\left(\sqrt{k}L\right)\tan\left(\frac{\sqrt{k}L}{2}\right) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Ausnutzen von:

$$\tan\left(\frac{\sqrt{k}L}{2}\right) = \frac{\left(1-\cos\sqrt{k}L\right)}{\sin\left(\sqrt{k}L\right)}$$

führt uns zu:

$$M_F = \begin{pmatrix} \cos\sqrt{k}L & \frac{1}{\sqrt{k}}\frac{\left(1+\cos\sqrt{k}L\right)\left(1-\cos\sqrt{k}L\right)}{\sin\left(\sqrt{k}L\right)} \\ -\sqrt{k}\sin\left(\sqrt{k}L\right) & \cos\sqrt{k}L \end{pmatrix}$$

oder weiter vereinfacht (mit Hilfe des trigonometrischen Pythagoras $\sin^2\left(\sqrt{k}L\right) = 1-\cos^2\left(\sqrt{k}L\right)$):

$$M_F = \begin{pmatrix} \cos\sqrt{k}L & \frac{1}{\sqrt{k}}\frac{\sin^2\left(\sqrt{k}L\right)}{\sin\left(\sqrt{k}L\right)} \\ -\sqrt{k}\sin\left(\sqrt{k}L\right) & \cos\sqrt{k}L \end{pmatrix}$$

Hieraus folgt also:

$$M_F = \begin{pmatrix} \cos\sqrt{k}L & \frac{1}{\sqrt{k}}\sin\left(\sqrt{k}L\right) \\ -\sqrt{k}\sin\left(\sqrt{k}L\right) & \cos\sqrt{k}L \end{pmatrix}$$

□

Die Skizze für die Bahn eines parallel auf die z-Achse auffallendes Teilchen befindet sich in Abb. 1.

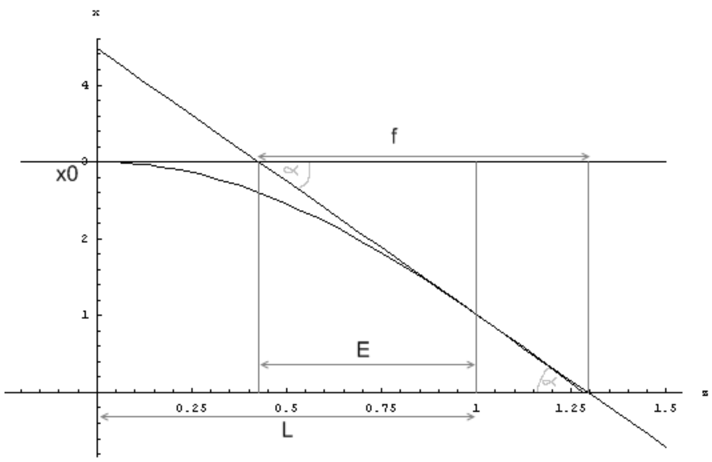

Abbildung 1: Bahnskizze mit E dem Abstand zwischen Hauptebene und Ende der Linse, f Brennweite und L der Länge der Linse

Aus der Bahnskizze (z,x-Ebene) erhalten wir den Eintrittspunkt in die dicke Linse $x_{IN} = (0, x_0)$ ($x_0 \neq 0$ nach Vorraussetzung) und den Austrittspunkt $x_{OUT} = (L, x(L))$, mit der Funktion $x(L) = x_0 \cdot \cos\sqrt{k}L + x_0^{/}\frac{1}{\sqrt{k}}\sin\sqrt{k}L$ (aus **Aufgabe 10** und mit M_F) mit der Anfangssteigung $x_0^{/} = 0$, da das auffallende Teilchen sich auf einer parallel zur z-Achse laufenden Bahn befinden soll. Hiermit ergibt sich für den Austrittspunkt $x_{OUT} = \left(L, x_0 \cdot \cos\sqrt{k}L\right)$. Es sind zwei gerade Teile der Bahn außerhalb des Magnetfeldes zu extrapolieren.

Hierfür betrachten wir die Übergänge zwischen feldfreiem Raum und Quadrupolmagnet. Beim Eintrittspunkt beträge die Steigung $x_0^{/} = 0$, d.h. wir erhalten keine Steigung und können den parallelen Strahl verlängern. Um die Steigung beim Austrittspunkt zu bestimmen, können wir $x\left(L\right)$ ableiten, wobei wir $x'\left(L\right) = -\sqrt{k}x_0 \cdot \sin\sqrt{k}L = m$ erhalten. Mit der allgemeinen Geradengleichung:

$$x = m \cdot z + a$$

erhalten wir nun auch a, indem wir unseren Punkt x_{OUT} einsetzen:

$$a = x - m \cdot z = x_0 \cdot \cos\sqrt{k}L - m \cdot L = x_0 \left(\cos\sqrt{k}L + \sqrt{k}L \cdot \sin\sqrt{k}L\right)$$

Der Winkel α der von der extrapolierten Geraden und der z-Achse eingeschlossen wird, liefert die Steigung:

$$|m| = \tan\alpha = \frac{x_0}{f}$$

Hier können wir wieder unsere oben berechnete Steigung einsetzen:

$$\begin{aligned} \frac{x_0}{f} &= \sqrt{k}x_0 \cdot \sin\sqrt{k}L \\ f &= \frac{1}{\sqrt{k} \cdot \sin\sqrt{k}L} \end{aligned}$$

□

Wir wollen nun noch den Abstand zwischen der Hauptebene und der Exit-Seite des Magneten bestimmen. Hierfür betrachten wir den Schnittpunkt der beiden extrapolierten Geraden, welche die Position der Hauptebene festlegen. Für den Schnittpunkt gilt:

$$x_0 = m \cdot (L - E) + a$$

wir können unser oben bestimmtes a und m einsetzen und erhalten:

$$\begin{aligned} x_0 &= -\sqrt{k}x_0 \cdot \sin\left(\sqrt{k}L\right) \cdot (L - E) + x_0 \left(\cos\sqrt{k}L + \sqrt{k}L \cdot \sin\sqrt{k}L\right) \\ x_0 &= x_0 \cdot \left[\sqrt{k}\sin\left(\sqrt{k}L\right) \cdot (-L + E + L) + \cos\sqrt{k}L\right] \\ 0 &= E \cdot \sqrt{k}\sin\left(\sqrt{k}L\right) + \cos\sqrt{k}L - 1 \\ E &= \frac{1 - \cos\sqrt{k}L}{\sqrt{k}\sin\left(\sqrt{k}L\right)} \end{aligned}$$

Mit der bereits oben verwendeten Relation:

$$\tan\left(\frac{\sqrt{k}L}{2}\right) = \frac{\left(1 - \cos\sqrt{k}L\right)}{\sin\left(\sqrt{k}L\right)}$$

folgt:

$$E = \frac{1}{\sqrt{k}}\tan\left(\frac{\sqrt{k}L}{2}\right)$$

□